线性算子谱理论及其应用

王 忠　傅守忠　编著



科 学 出 版 社

(O-5082.0101)

科学数理分社
电 话：(010) 64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
网 址：http：//www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

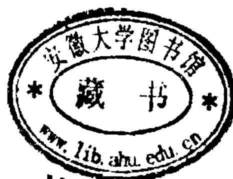
www.sciencep.com



定价：88.00 元

线性算子谱理论及其应用

王　忠　傅守忠　编著



科　学　出　版　社

北　京



内 容 简 介

本书介绍线性算子及其谱的基本概念, 无界对称算子、J-对称算子和 C-对称算子的扩张理论; 主要讨论几类特殊算子(有界对称算子、有界正常算子、有界 C-对称算子、Hilbert-Schmidt 型算子、无界自伴算子、无界正常算子、无界 C-自伴算子)的谱理论及其在相关摄动下的谱分析; 重点将上述相关的理论具体应用到微分方程边值问题形成的微分算子理论, 特别地, 关于自伴、非自伴微分算子的谱理论和谱分析, 有效地解决了相应的微分方程边值问题.

本书适合于基础数学、应用数学以及相关专业的理工科研究生阅读, 可供专门从事泛函分析、线性算子谱理论、微分算子理论研究的数学研究人员使用, 也可供微分方程、非线性科学和量子力学等领域的科研及教学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性算子谱理论及其应用/王忠, 傅守忠编著. —北京: 科学出版社, 2013.3

ISBN 978-7-03-036942-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… ②傅… Ⅲ. ① 线性算子理论—谱(数学) Ⅳ. ① O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 042335 号

责任编辑: 赵彦超 徐园园 / 责任校对: 宋玲玲
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2013 年 3 月第一次印刷 印张: 20
字数: 388 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

在曹之江先生80大寿之际，

学生谨以此书献给他！

前　　言

线性算子的谱理论, 是算子理论的主要组成部分, 是泛函分析的重要研究内容, 也是现代数学的基础理论. Hilbert 空间中关于有界对称算子和无界自伴 (自共轭) 算子的理论已有完备的理论体系, 将这些理论应用到其他数学分支, 如微分方程、积分方程等理论中, 很好地解决了现代数学中的许多重要问题. 利用线性算子的理论研究上述问题, 即产生了微分算子和积分算子. 数学物理和现代科技中的许多问题最终都归结为确定的微分算子和积分算子的特征值、特征函数及其相关函数的完备性, 以及将任意函数按特征函数及其相关的函数展开成级数 (或积分) 的问题. 特别地, 人们发现微分算子谱分析是解决许多量子力学问题的基本数学工具, 微分算子理论已成为量子力学的数学支柱, 所以, 微分算子理论一百多年来一直为人们所关注.

对于线性对称微分算式及其自伴边条件所生成的自伴微分算子, 利用完备的自伴算子理论, 可以定性地得到微分算子的谱分析. 由于微分算子的谱与其系数和边条件有着密切的联系, 所以, 定量分析微分算子的谱需要结合具体的分析方法. 在应用物理和工程力学中, 我们也经常碰到一些非对称或非自伴问题, 如在非自伴边条件下的对称微分算式, 以及在线性边条件下的非对称微分算式等所生成的微分算子. 对这些问题的定性定量分析, 不再有类似自伴算子那样完善的理论体系, 需要建立非自伴 (自共轭) 算子的谱理论作为其理论基础. 著名数学家 Naimark 认为只有有效地运用泛函分析的观点和方法, 才有可能深刻地了解微分算子理论并获得最一般的结果. 由于非对称和非自伴问题范围大且形式多种多样, 所以只能利用已有的算子理论, 并结合分析方法来研究相对应的微分算子的谱及其相关理论.

本书介绍线性算子及其谱的基本概念, 无界对称算子、J-对称算子和 C-对称算子的扩张理论; 主要讨论几类特殊算子 (有界对称算子、有界正常算子、有界 C-对称算子、Hilbert-Schmidt 算子、无界自伴算子、无界正常算子、无界 C-自伴算子) 的谱理论及其在相关摄动下的谱分析; 重点将上述相关的理论具体应用到微分方程边值问题形成的微分算子理论, 特别地, 关于自伴、非自伴微分算子的谱理论和谱分析, 有效地解决了相应的微分方程边值问题.

本书的主要结构: 第 1 章介绍线性算子及其谱的基本概念, 并给出线性算子谱的几种划分及其相互之间的关系; 第 2 章介绍有界对称算子、正常算子、无界自伴算子和无界正常算子的谱分解定理及其谱理论; 第 3 章介绍无界对称算子的扩张理论及其谱的变化, 以及自伴算子在相关摄动下的谱理论, 给出这些理论在对称微

分算子扩张理论中的具体应用; 第 4 章介绍有界 C-对称算子和无界 C-自伴算子谱理论及其应用; 第 5 章介绍无界 C-对称算子的扩张理论及其谱的变化, 以及这些理论在 J-对称微分算子的扩张理论和 J-自伴微分算子谱理论中的应用; 第 6 章介绍两类非自伴算子 ——Hilbert-Schmidt 算子和自伴算子加相关摄动所生成算子的谱理论及其在微分算子理论中的应用; 第 7 章利用第 4~6 章中非自伴算子的理论, 结合分析方法有效地解决了二阶非自伴微分算子谱的定性和定量分析.

本书是作者在为研究生开设算子理论及其在微分算子中的应用课程的基础上, 结合内蒙古大学微分算子讨论班成员和作者多年来从事微分算子理论研究的最新研究成果而形成的. 阅读本书需要有泛函分析和常微分算子理论的基础知识.

作者在写作过程中得到了研究生在文字录入和校对方面的帮助, 也得到了肇庆学院微分算子讨论班全体成员的帮助, 在此表示诚挚的谢意! 本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (项目编号: 11171295) 和广东省自然科学基金项目 (项目编号: 9251064101000015) 的资助, 作者在此表示深深的谢意! 由于作者的学识与能力有限, 书中难免会有偏颇和不当之处, 希望数学界的同仁不吝赐教.

作　者

2012 年 10 月

目 录

第 1 章　线性算子及其谱

线性算子和线性泛函是线性空间之间的映射, 是泛函分析研究的主要对象. 本书主要研究几种类型特殊无界线性算子的扩张及其谱分解. 读者学习本书之前必须掌握线性空间、线性拓扑空间、线性赋范空间、Banach 空间、内积空间和 Hilbert 空间的相关知识及其基本性质.

1.1　线性算子的定义

算子是两个线性空间之间的映射, 是联系两个线性空间的桥梁, 通过算子的特性可以研究对应线性空间的结构, 也可以利用线性空间的结构研究算子的特性. 现代数学问题和现代物理学问题中的许多数学关系最终都归结为线性空间上的算子, 所以, 算子理论不仅是解决现代数学问题的有效工具, 而且也是现代物理学的数学支柱.

定义 1.1.1　设 X 和 Y 是两个线性空间, D 是 X 的一个线性流形,

$$T : D \to Y$$

是一个映射, D 称为 T 的定义域, 一般记为 $D(T)$; $R(T) = \mathrm{Ran}(T) = \{Tx|x \in D\}(\subset Y)$ 称为 T 的值域. 若

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in D,\ \forall \alpha, \beta \in K \subset \mathbb{C},$$

那么称 T 是一个线性算子 (linear operator).

例 1.1.2　设 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $T = (a_{ij})_{m\times n}$, 对于任意 $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$, 令

$$Tx = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)_{i=1}^m,$$

则 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性算子.

例 1.1.3　设 $X = Y = L^2[a, b]$, $P(D) = \sum\limits_{i=0}^n a_i(x)D^i$ 是一个微分多项式, 其中 $a_i(x) \in L^2[a, b]$. 若

$$T : u(x) \mapsto P(D)u(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)D^i u(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)u^{(i)}(x),$$

对于任意 $u(x) \in D(T) = \{u(x) \in C^{(n-1)}[a,b] \mid u^{(n)}(x) \in L^2[a,b]\}$, 则 T 是一个从 X 到 Y 的线性算子.

定义 1.1.4 设 X 和 Y 是线性赋范空间, $T: D(T) \to Y$ 是定义在 X 上并在 Y 中取值的线性算子. 如果对任意的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(T)$, 当 $x_n \to x_0 \in D(T)$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 那么, 称算子 T 在点 $x_0 \in D(T)$ 是连续的 (continuous). 如果 T 在 $D(T)$ 内的任意一点处连续, 则称线性算子 T 在 $D(T)$ 上连续.

命题 1.1.5 对于线性算子 T 而言, 下面三个条件等价:

(1) T 在 $D(T)$ 上连续;

(2) T 在 $x = \theta$ 处连续;

(3) T 在 $x_0 \in D(T)$ 处连续, 其中 x_0 是 $D(T)$ 中的某一固定点.

定义 1.1.6 设 X 和 Y 是线性赋范空间, 如果存在常数 $M > 0$, 使得

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad \forall x \in D(T),$$

那么, 称算子 T 是有界的 (bounded), 其中, $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 分别表示空间 X 和 Y 上的范数.

命题 1.1.7 设 X,Y 是线性赋范空间, T 是 $D(T)$ 上连续线性算子当且仅当 T 是 $D(T)$ 上的有界线性算子.

定义 1.1.8 设 X 和 Y 是线性赋范空间, 用 $L(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的线性算子组成的集合, 用 $B(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的有界线性算子组成的集合, 称

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{\theta\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

为算子 T 在 $L(X,Y)$ 上的范数 (norm).

容易验证: 在上述算子范数下, $L(X,Y)$ 是一个线性赋范空间.

显然, 例 1.1.2 中的线性算子 T 是一个有界线性算子, 而例 1.1.3 中的算子是无界算子.

定义 1.1.9 设 $D(T) \subset X$. 若 $T \in B(X,Y)$, 并且 T 将 $D(T)$ 中的任意有界集 M 映成 Y 中的预紧集 TM, 那么称线性算子 T 是紧线性算子(compact linear operator); 所有定义在 X 上 $(D(T) = X)$ 的紧线性算子组成的集合记为 $C(X,Y)$.

显然, $C(X,Y) \subset B(X,Y) \subset L(X,Y)$.

定义 1.1.10 设 X 和 Y 是 Banach 空间, T 是定义在 $D(T) \subset X$ 上、取值在 Y 中的一个线性算子, 其中, $D(T)$ 是 X 的一个线性子空间, $R(T) \subset Y$. 称乘积空间 $X \times Y$ 上的线性子空间:

$$\Gamma(T) = \{\langle x, Tx\rangle \in X \times Y \mid x \in D(T)\} \tag{1.1.1}$$

为线性算子 T 的图 (graph). 若图 $\Gamma(T)$ 在 $X\times Y$ 中是闭的, 就称算子 T 是闭线性算子, 或称 T 是闭的 (closed).

注 1 设 $D(T)\subset X$, $R(T)\subset Y$, 线性算子 T 是闭算子的充分必要条件: 若 $\{x_n\}\subset D(T)$, $x_n\to x\in X\ (n\to\infty)$ 且 $Tx_n\to y\ (n\to\infty)$, 则 $x\in D(T)$, 且 $y=Tx$.

注 2 $\|x\|=\|x\|_X+\|Tx\|_Y$ 称为线性算子 T 的图模. T 是闭算子当且仅当 $(D(T),\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

注 3 $X^*=B(X,\mathbb{R})$ 表示 X 上所有有界线性泛函组成的集合, 称为空间 X 的共轭空间 (对偶空间)(dual space).

定义 1.1.11 设 T 是 Banach 空间 X 到 Y 的稠定线性算子, 即 $D(T)$ 在 X 中稠密. 记

$$D(T^*)=\{y^*\in Y^*\,|\,\exists x^*\in X^*, \text{使得 } \forall x\in D(T), \text{都有}\\ (y^*,Tx)=(x^*,x), \text{即 } y^*(Tx)=x^*(x)\},$$

其中, X^* 和 Y^* 分别表示 X 和 Y 的共轭空间. 令

$$T^*:\ y^*\mapsto x^*,\quad \forall y^*\in D(T^*),$$

称 T^* 为 T 的共轭算子或伴随算子(adjoint operator), $D(T^*)$ 为 T^* 的定义域.

注 1 若 $D(T)$ 在 X 中稠密, 则 T^* 唯一确定, 而且也是线性算子.

$$\begin{array}{ccc} X\supset D(T) & \xrightarrow{T} & R(T)\subset Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^*\supset R(T^*) & \xleftarrow{T^*} & D(T^*)\subset Y^* \end{array} \tag{1.1.2}$$

定理 1.1.12 任何稠定算子 T 的共轭算子 T^* 总是闭的, 而且当 $T_1\subset T_2$ 时, $T_2^*\subset T_1^*$.

证明 令 V 是 $X\times Y$ 到 $Y\times X$ 上的映射,

$$V\langle x,y\rangle\mapsto\langle -y,x\rangle,\quad \forall\langle x,y\rangle\in X\times Y.$$

用 $Y^*\times X^*$ 表示空间 $Y\times X$ 的对偶, 则对 $\langle y^*,x^*\rangle\in Y^*\times X^*$,

$$(\langle y^*,x^*\rangle,\langle y,x\rangle)=(y^*,y)+(x^*,x)=y^*(y)+x^*(x).$$

设 $\Gamma(T^*)\subset Y^*\times X^*$ 是线性算子 T^* 的图, $\Gamma(T)\subset X\times Y$ 是 T 的图, 则 $\forall x\in D(T)$,

$$\langle y^*,x^*\rangle\in\Gamma(T^*)\Leftrightarrow(\langle y^*,x^*\rangle,V\langle x,Tx\rangle)=0,$$

由此得 $\Gamma(T^*)=(V\Gamma(T))^{\perp}$, 故 T^* 总是闭的.

由共轭算子的定义可直接得到, 当 $T_1 \subset T_2$ 时, $T_2^* \subset T_1^*$. □

当 $X = Y$ 时, 若 T 是定义在 X 上并且取值在 X 上的稠定线性算子, 则 T^* 是定义在 X^* 上并取值在 X^* 上的稠定线性算子. 特别地, 若 X 是一个 Hilbert 空间, 则根据 Riesz 定理, X 与 X^* 是同构的, 即 $X = X^*$, 所以, T^* 也可以看成是定义在 X 上并且取值在 X 上的稠定线性算子.

定义 1.1.13 设 X 是一个 Hilbert 空间, T 是 X 到自身的一个稠定线性算子, 若 T^* 是 T 的扩张, 即 $T \subset T^*$, 则称 T 是对称算子 (symmetric operator); 若 $T^* = T$, 则称 T 是自伴 (自共轭) 算子 (self-adjoint operator); 若 T 可闭化, 且 $\overline{T}$ 是自伴的, 则称 T 是本质自伴算子 (essential self-adjoint operator).

注 1 根据共轭算子的定义以及 Riesz 定理, 对于 $\forall x \in D(T),\ y \in D(T^*)$, 有

$$(Tx, y) = (x, T^*y).$$

注 2 稠定线性算子 T 是对称算子的充分必要条件是 $\forall x, y \in D(T)$, 都有

$$(Tx, y) = (x, Ty)\,. \tag{1.1.3}$$

注 3 对于有界算子而言, 自伴与对称是等价的. 对于无界算子则不然.

注 4 如果 T 和 S 都是对称的, 且 $T \subset S$, 则称 S 是 T 的对称扩张, 并且有

$$T \subset S \subset S^* \subset T^*. \tag{1.1.4}$$

如果 T 是自伴的, S 是对称的, 且 $T \subset S$, 则 $T \subset S \subset S^* \subset T^*$, 即有 $T = S$. 这说明自伴算子是其自身的极大对称扩张.

例 1.1.14 在 $L^2[0,1]$ 上的常微分算子

$$T_0' = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + p_0(t), \tag{1.1.5}$$

其中, $D(T_0') = C_0^\infty[0,1]$, $p_0 \in L^2[0,1]$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非零实函数, 则

(1) T_0' 是稠定对称算子;

(2) T_0' 不是闭算子, 但可闭化; $T_0 = \overline{T_0'}$, 对 $\forall u \in D(T_0), T_0 u = T_0' u$, 其中,

$$D(T_0) = \{u \in L^2[0,1] \mid u''(t) \text{ 存在, 且 } T_0' u \in L^2[0,1], u(0) = u(1) = 0\};$$

(3) 共轭算子 $T_0^* = (T_0')^*$, $\forall u \in D(T_0^*)$,

$$T_0^* u = T_0'^* u = -u''(t) + p_0(t)\ u(t),$$

其中, $D(T_0^*) = \{u \in L^2[0,1] \mid u''(t)\text{存在, 且 } T_0' u \in L^2[0,1]\}$.

(4) 令

$$D(T)=\{u\in D(T_0^*)\mid u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=u(1)\cos\beta+u'(1)\sin\beta=0\},$$

其中, $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi/2$. $\forall u\in D(T)$,

$$Tu=-u''(t)+p_0(t)\,u(t),$$

容易验证 T_0 是对称算子, T 是自伴算子.

设 X 是复 Hilbert 空间, 若算子 $C:X\to X$ 满足 $C^2=I$, 则称其为幂等的 (involutive); 算子 $C:X\to X$ 称为是反线性 (共轭线性) 的 (antilinear, conjugate-linear) 是指

$$C(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}Cx+\bar{\beta}Cy,\quad \forall x,y\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{C};\tag{1.1.6}$$

称算子 $C:X\to X$ 是等距的是指

$$(Cf,Cg)=(g,f),\quad \forall f,g\in X.\tag{1.1.7}$$

复 Hilbert 空间 X 上的一个幂等的、等距的反线性算子称为是 X 上的共轭算子 (conjugate operator), 记作 C.

显然, 如果 X 是一个复 Hilbert 空间, J 是 X 上取复共轭的映射, 即 $\forall y\in X$, $Jy=\overline{y}$, 则 J 是 X 上的共轭算子 (即 $Jf(x)=\overline{f(x)}$).

设 X 是一个复 Hilbert 空间, C 是 X 上的共轭算子, T 是 X 到自身的一个线性的、闭的稠定算子, 若 T^*C 是 CT 的扩张, 即 $CT\subset T^*C$(亦即 $T\subset CT^*C$), 或者等价于

$$(CTf,g)=(CTg,f),\quad \forall f,g\in D(T),\tag{1.1.8}$$

则称算子 T 是 X 上的 C-对称算子; 若

$$T=CT^*C\quad(\text{即 } CT=T^*C),\tag{1.1.9}$$

则称 T 是 X 上的 C-自伴(C-自共轭) 算子.

设 X 是一个复 Hilbert 空间, J 是 X 上取复共轭的算子, $\forall y\in X, Jy=\overline{y}$; T 是 X 到自身的一个稠定线性算子. 若 T^*J 是 JT 的扩张, 即 $JT\subset T^*J$(亦即 $JTJ\subset T^*$, 或 $T\subset JT^*J$), 则称 T 是 C-对称算子, 也称为 J-对称算子 (J-symmetric operator); 若 $JT=T^*J$(即 $T=JT^*J$), 则称 T 是 C-自伴 (C-自共轭) 算子, 也称为 J-自伴算子(J-self-adjoint operator).

我们将在第 4 章、第 5 章和第 7 章中对这类特殊算子重新给出定义, 并进行专门研究.

例 1.1.15 在例 1.1.14 中, 加入一个非零复项, 考虑 $L^2[0,1]$ 上的常微分算子

$$T_0'=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+p_1(t)+\mathrm{i}p_2(t),\tag{1.1.10}$$

其中, $p_1(t), p_2(t)$ 均为定义在 $[0,1]$ 上的非零实函数, $D(T_0') = C_0^\infty[0,1]$, 则

(1) T_0' 是稠定 J-对称算子;

(2) T_0' 不是闭算子, 但可闭化; $T_0 = \overline{T_0'}$, $\forall u \in D(T_0), T_0 u = T_0' u$, 其中,

$$D(T_0) = \{u \in L^2[0,1] \mid u''(t)\text{存在, 且}T_0' u \in L^2[0,1], u(0) = u(1) = 0\};$$

(3) 共轭算子 $T_0^* = (T_0')^*$ 为

$$T_0^* u = T_0'^* u = -u''(t) + (p_1(t) - \mathrm{i}p_2)\, u(t), \quad \forall u \in D(T_0^*),$$

$$D(T_0^*) = \{u \in L^2[0,1] | u''(t)\text{存在, 且}T_0' u \in L^2[0,1]\}.$$

(4) 令

$$D(T) = \{u \in D(T_0^*) \mid u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0\},$$

其中, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$, $\forall u \in D(T), Tu = -u''(t) + (p_1(t) + \mathrm{i}p_2(t))u(t)$, 容易验证 T_0 是 J-对称算子, T 是 J-自伴算子.

定理 1.1.16 设 T 是 Hilbert 空间 X 中的线性算子, 定义它的核

$$N(T) = \{x \in D(T) \mid Tx = 0\}, \tag{1.1.11}$$

(1) 若 $D(T)$ 在 X 中稠密, 则

$$N(T^*) = R(T)^\perp; \tag{1.1.12}$$

(2) 若 T 是闭算子, 则

$$N(T)^\perp = R(T^*). \tag{1.1.13}$$

证明 (1) 任取 $y \in N(T^*)$, 则 $T^* y = 0$, 于是对任意的 $x \in D(T)$,

$$0 = (x, 0) = (x, T^* y) = (Tx, y), \tag{1.1.14}$$

从而 $y \perp R(T)$, 即 $y \in R(T)^\perp$.

反之, 任取 $y \in R(T)^\perp$, 则对任意的 $x \in D(T)$,

$$0 = (Tx, y) = (x, T^* y), \tag{1.1.15}$$

又由于 $D(T)$ 在 X 中稠密, 所以 $T^* y = 0$. 从而 $y \in N(T^*)$. 故 $N(T^*) = R(T)^\perp$.

(2) 类似可证. □

定义 1.1.17 设 X 是 Hilbert 空间, U 和 N 是 X 到自身的有界线性算子, 若 $\|U\| = 1$(即 $U^*U = I$), 则称 U 为空间 X 上的酉算子 (或称为等距算子) (unitary operator); 若 $N^*N = NN^*$, 则称 N 为空间 X 上的正常算子 (normal operator).

注 自伴算子和酉算子均为正常算子.

1.2 预解算子

为了方便研究算子的谱, 引入预解算子和预解算式及其性质.

定义 1.2.1 设 X 是 Banach 空间, $A: D(A) \subset X \to X$ 是闭线性算子, 称集合

$$\rho(A)=\{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda I - A)^{-1}\text{存在, 且}R(\lambda I - A) = X\}$$

为算子 A 的预解集(正则集)(resolvent set, regular point set), $\rho(A)$ 中的任何一点 λ 称为算子 A 的正则点 (regular point).

定义 1.2.2 算子值函数 $R_\lambda(A): \rho(A) \to B(X)$ 定义为

$$\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \rho(A), \tag{1.2.1}$$

称为 A 关于 λ 的预解算子函数, $(\lambda I - A)^{-1}$ 称为算子 A 的预解算式; 对某 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 称 $R_{\lambda_0}(A)$ 为算子 A 对应正则点λ_0 的预解算子 (resolvent operator).

引理 1.2.3 设 A 是定义在 Banach 空间上的有界线性算子, 即 $A \in B(X)$, 且 $\|A\| < 1$, 则 $(I - A)^{-1} \in B(X)$, 并且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{1.2.2}$$

证明 方法一: 由于 $\|A\| < 1$, 所以, $\|I - A\| \geqslant 1 - \|A\| > 0$, 因此 $(I - A)^{-1}$ 存在, 且

$$\|I\| = \|(I - A)(I - A)^{-1}\| \geqslant (1 - \|A\|)\|(I - A)^{-1}\|, \tag{1.2.3}$$

故

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

方法二: 由 Neumann 级数 $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 可得

$$\begin{aligned}\|(I - A)^{-1}\| &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\| \leqslant 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \cdots + \|A\|^n + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \|A\|}.\end{aligned}$$

□

定理 1.2.4 如果 A 是定义在 Banach 空间 X 上的闭线性算子, 则 $\rho(A)$ 是开集.

证明 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 则

$$\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}].$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^{-1}$ 时, 由引理 1.2.3 知, $[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]$ 可逆且其逆有界. 令 $B = [I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]^{-1}$, 则

$$(\lambda I - A)^{-1} = BR_{\lambda_0}(A) \in B(X), \tag{1.2.4}$$

所以, $\lambda \in \rho(A)$. □

引理 1.2.5 (第一预解公式)　设 $\lambda, \mu \in \rho(A)$, 则有

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A). \tag{1.2.5}$$

证明

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1}\\ &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - \lambda I + \lambda I - A)(\mu I - A)^{-1}\\ &= (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} + (\mu I - A)^{-1}\\ &= (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A) + R_\mu(A),\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

所以, $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$. □

定理 1.2.6　预解式 $R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 内是算子值解析函数.

证明　(1) 先证 $R_\lambda(A)$ 的连续性. 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 由式 (1.2.4) 和式 (1.2.2) 有

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(A)\| &\leqslant \|R_{\lambda_0}(A)\| \cdot \|B\| \leqslant \|R_{\lambda_0}(A)\| \cdot \|[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]^{-1}\|\\ &\leqslant \|R_{\lambda_0}(A)\| \frac{1}{1 - |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|}.\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

只要 $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{2\|R_{\lambda_0}(A)\|}$, 就有

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant 2\|R_{\lambda_0}(A)\|. \tag{1.2.8}$$

由式 (1.2.5) 得

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)\| &\leqslant |\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_\lambda(A)\| \cdot \|R_{\lambda_0}(A)\|\\ &\leqslant 2\|R_{\lambda_0}(A)\|^2 |\lambda - \lambda_0| \to 0, \quad \lambda \to \lambda_0,\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

从而 $R_\lambda(A) \to R_{\lambda_0}(A), \quad \lambda \to \lambda_0$.

(2) 可微性. 因为

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A) = -R_{\lambda_0}(A)^2, \tag{1.2.10}$$

所以, 预解式 $R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 可微. □

定理 1.2.7 设 A 是定义在 Banach 空间 X 上的有界线性算子, 则 $\mathbb{C}\backslash\rho(A) \neq \varnothing$.

证明 反证法. 若 $\mathbb{C}\backslash\rho(A) = \varnothing$, 则 $\rho(A) = \mathbb{C}$, 那么 $R_\lambda(A)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 并且由 Neumann 级数知, 当 $|\lambda| > 2\|A\|$ 时, 有

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n, \tag{1.2.11}$$

从而

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \leqslant \frac{1}{\|A\|}. \tag{1.2.12}$$

因此, $\|R_\lambda(A)\|$ 在复平面上是有界的. 对任意 $f \in B(X)^*$, 定义 $u_f(\lambda) = f(R_\lambda(A))$. 因为 $R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 上解析, 所以, f 是有界线性泛函, 因此, $u_f(\lambda)$ 是 $\rho(A)$ 上的解析函数. 由 Liouville 定理知, $u_f(\lambda)$ 是依赖于 f 的常值函数与 λ 选取无关, 于是 $R_\lambda(A)$ 是与 λ 无关的常值算子. 而根据 Hahn-Banach 定理知, 每个 B^* 空间都有足够的连续线性泛函, 矛盾. □

1.3 线性算子的谱

特征值及其分布直接来源于近代物理学、量子力学和工程技术问题的需要, 如求振动的频率, 判定系统的稳定性等均涉及相应算子的特征值或特征分布; 能量算符的特征值对应着该系统束缚态的能级; 特别地, 光谱就是某类型算子的谱分布.

对于线性算子而言, 复平面上的点 $\lambda \in \mathbb{C}$, 或属于 $\rho(T)$(即是算子 T 的正则点), 或不属于 $\rho(T)$, 将复平面上所有不属于 $\rho(T)$ 的点放在一起形成一个集合, 称此集合为线性算子 T 的谱集.

定义 1.3.1 设 X 是 Banach 空间, T 是定义在 X 上的闭的稠定线性算子, $\rho(T)$ 是 T 的正则集 (预解集), 集合

$$\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T) \tag{1.3.1}$$

称为 T 的谱集(spectrum).

根据 $\sigma(T)$ 以及 $\rho(T)$ 的定义, 对 $\sigma(T)$ 可以作如下划分:

(1) 若 $(\lambda I - T)^{-1}$ 不存在, 则称 λ 是线性算子 T 的特征值 (eigenvalue), 全体特征值的集合记为 $\sigma_p(T)$, 称为线性算子 T 的点谱(point spectrum).

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T)^{-1}\text{不存在}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{\theta\}\}.\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

对于任意的 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 都存在 $x \in D(T)$, 使得 $Tx = \lambda x$, 称 x 是对应于特征值 λ 的特征向量(eigenvector). 称

$$N_\lambda(T) = \{x \in D(T) | Tx = \lambda x\} \tag{1.3.3}$$

为线性算子 T 对应于特征值 λ 的特征子空间(eigenspace), 也称为线性算子 T 对应于特征值 λ 的零空间(null space), 或线性算子 T 对应于特征值 λ 的核空间 (kernel space), 同时也记为 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$, 即 $N_\lambda(T) = \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$. $\dim N_\lambda(T)$ 称为特征值 λ 的几何重数(geometric multiplicity), 记为 $n_\lambda = \mathrm{null}\ T_\lambda$, 即 $n_\lambda = \mathrm{null}\ T_\lambda = \dim N_\lambda = \dim \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$.

(2) 若 $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在, 且 $R(\lambda I - T) \neq X$, 但 $\overline{R(\lambda I - T)} = X$, 则称 λ 为 T 的连续谱点, 全体连续谱点的集合记为 $\sigma_c(T)$, 称为 T 的连续谱(continous spectrum).

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \{\theta\},\ \overline{R(\lambda I - T)} = X,\ (\lambda I - T)^{-1}\text{无界}\}. \tag{1.3.4}$$

(3) 若 $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在, 但 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$, 则称 λ 为 T 的剩余谱点, 全体剩余谱点的集合记为 $\sigma_r(T)$, 称为 T 的剩余谱 (residual spectrum).

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \{\theta\},\ \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\}. \tag{1.3.5}$$

注 1　当 $\dim X < \infty$ 时, 线性算子 T 的谱集只有特征值, 即所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都或者是特征值, 或者是正则点.

注 2　谱还可以按照如下方式分类

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) \cup \sigma_e(T), \tag{1.3.6}$$

其中,

(1) $\sigma_d(T) = \sigma_p(T) \backslash \{T\text{的无穷维特征值}\}$, 即线性算子 T 的有限维特征值的全体, 称为 T 的离散谱(discrete spectrum);

(2) $\sigma_e(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_d(T)$ 称为 T 的本质谱(essential spectrum).

注 3　当线性算子 T 是正常算子、自伴算子或 J-自伴算子时, $\sigma_r(T) = \varnothing$, 则

$$\sigma_e(T) = \sigma_c(T) \cup \{T\text{的无穷维特征值}\}. \tag{1.3.7}$$

注 4　有界线性算子的谱 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ |\lambda| \leqslant \|T\|\}$.

例 1.3.2　(1) 设 $X = L^2[0, 1]$, $Au(t) = -u''(t)$, 其中

$$D(A) = \{u(t) \in L^2[0, 1] \mid u''(t) \in L^2[0, 1],\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1)\},$$

则 A 是闭线性算子, 且 $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{(2n\pi)^2 \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$.

(2) 设 $X = C[0,1]$, $Au(t) = t\,u(t)$, 则 A 是有界线性算子, 且 $\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1]$.

(3) 若 $X = L^2[0,1]$, $Au(t) = t\,u(t)$, 则 A 是有界线性算子, 且 $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$. (参见文献 [211] 第 155 页.)

(4) 在空间 l^2 上, 考虑右推移算子 $A_r : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto y = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 和左推移算子 $A_l : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto y = (x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots)$, 则 A_r 与 A_l 均为有界线性算子, 且

$$\sigma_p(A_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(A_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} | |\lambda| = 1\}, \quad \sigma_r(A_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} | |\lambda| < 1\};$$
$$\sigma_p(A_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} | |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_c(A_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} | |\lambda| = 1\}, \quad \sigma_r(A_l) = \varnothing,$$
$$\sigma(A_r) = \sigma(A_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} | |\lambda| \leqslant 1\}.$$

(5) 在 $L^2(-\infty, \infty)$ 上, 考虑微分算子 $Ax(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $D(A) = H^1(-\infty, \infty)$, 则

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda < 0\}, \quad \sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda = 0\}, \quad \sigma_r(A) = \varnothing.$$

定义 1.3.3 设 A 是定义在 Banach 空间 X 上的有界线性算子, 称实数

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \tag{1.3.8}$$

为 A 的谱半径 (radical of spectrum).

显然有

$$r_\sigma(A) \leqslant \|A\|, \quad \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant r_\sigma(A)\}. \tag{1.3.9}$$

定理 1.3.4 如果 $A \in B(X)$ 是定义在 Banach 空间上的有界线性算子, 那么

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{1.3.10}$$

1.4 谱的其他分类

为了研究问题的方便, 以及具体物理问题的需要, 常针对不同问题, 采用不同的方法对复平面 $\mathbb{C}$ 上的点进行分类. 本节介绍几种常用的分类法, 还有其他的分类, 可以参见相关的文献.

定义 1.4.1 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $T \in B(X, Y)$, 如果 $R(T)$ 是闭的, 并且 $\text{null}\, T < \infty$, $\text{def}\, T < \infty$, 则称 T 是半 Fredholm 算子. 若 $\min\{\text{null}\, T, \text{def}\, T\} < \infty$, 则称 T 是-Fredholm 算子, 其中

$$\text{null}\, T = \dim N(T) = \dim\{x \in X \mid Tx = 0\}, \tag{1.4.1}$$

$$\text{def}\, T = \text{codim} R(T) = \dim(X/R(T)), \tag{1.4.2}$$

分别称为 T 的零空间的维数 (dimension of null space) 和 T 的亏数 (deficiency), 称 $\operatorname{Ind} T = \operatorname{null} T - \operatorname{def} T$ 为 T 的指数 (Index).

例 1.4.2 (1) 设 $T: l^2 \mapsto l^2$ 上的左移算子, 即对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2$, $Tx = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$, 则 $\operatorname{null} T = 1$. 而 T 是满射, 即 $R(T) = l^2$, 所以 $\operatorname{def} T = 0$, 从而 $\operatorname{Ind} T = 1$.

(2) 设 $S : l^2 \mapsto l^2$ 是右移算子, 即对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2$, $Sx = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, 则 $\operatorname{null} S = 0$, $\operatorname{def} S = 1$, $\operatorname{Ind} S = -1$.

定义 1.4.3 设 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$, 称

$$M_\lambda = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}, (T - \lambda I)^n x = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N(T_\lambda^n) \tag{1.4.3}$$

为 T对应于特征值λ 的根子空间(代数特征空间) (root subspace, algebraic eigenspace corresponding to λ). 任意的 $x \in M_\lambda$, 都存在正整数 n, 使得 $(T - \lambda I)^n x = 0$, 称此 x 为 T 对应于特征值 λ 的广义特征向量 (根向量) (generatized eigenvector, root vector). $m_\lambda = \dim M_\lambda$ 称为 T 对应于特征值 λ 的代数重数(algebraic multiplicity).

显然, 特征值 λ 的几何重数小于或等于代数重数, 即 $n_\lambda = \operatorname{null} T_\lambda \leqslant m_\lambda = \dim M_\lambda$.

定义 1.4.4 设 X 是 Banach 空间, T 是闭线性算子, 记

$$\rho_F(T) = F_\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - T \text{ 是 Fredholm 算子}\}, \tag{1.4.4}$$

$$\sigma_F(T) = F_\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash F_\rho(T), \tag{1.4.5}$$

称 $F_\rho(T)(\rho_F(T))$ 为线性算子 T 的 Fredholm 集, 称 $F_\sigma(T)(\sigma_F(T))$ 为线性算子 T 的 Fredholm 谱 (Wolf 本质谱)(Fredholm spectrum, Wolf essential spectrum).

容易证明:

(1) T 的 Fredholm 集是一个包含 $\rho(T)$ 的开集, $\rho(T) \subset \rho_F(T)$;

(2) T 的 Fredholm 谱集是 $\sigma(T)$ 的一个闭子集;

(3) 若 $\dim X < \infty$, 则 $F_\sigma(T) = \varnothing$;

(4)

$$F_\sigma(T) = F_\sigma(T^*): \tag{1.4.6}$$

(5) $F_\sigma(P(T)) = P(F_\sigma(T))$, 其中 $P(\lambda)$ 是 λ 的多项式.

定义 1.4.5 设 X 是 Banach 空间, $T \in L(X)$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in D(T)$, 且 $\|x\| = 1$, 使得 $\|\lambda x - Tx\| < \varepsilon$, 则称 λ 为线性算子 T 的近似点谱 (approximate point spectra). 所有近似点谱所成的集合 $\sigma_a(T)$ 称为线性算子 T 的近似点谱集, 简称为 T 的近似点谱 (approximate point spectrum).

定理 1.4.6 线性算子 T 的近似点谱 $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$ 是 $\sigma(T)$ 的一个闭子集, 并且 $\sigma_a(T)$ 包含 $\sigma(T)$ 的所有边界. 若 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$, 则 $\sigma_a(T) \neq \varnothing$.

证明 根据近似点谱的定义可知, $\sigma_p(T) \subset \sigma_a(T), \sigma_c(T) \subset \sigma_a(T)$, 并且 $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$. 而当 $\lambda \in \sigma_r(T)$ 且 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界时, $\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$, $\lambda \notin \sigma_a(T)$, 所有这些点记为 A, 则 $A \subset \sigma_r(T) \subset \sigma(T)$. 任取 $\lambda_0 \in A$, $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 有界. 当 $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$ 时, 线性算子

$$\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T) = (\lambda_0 I - T)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}] \quad (1.4.7)$$

可逆且其逆有界, 但 $\overline{R(\lambda I - T)} = \overline{R(\lambda_0 I - T)} \neq X$, 所以, $\lambda \in A$. 由此得到 A 是一个开集. 再由近似谱的定义可知, $\sigma_a(T) = \sigma(T) \backslash A$, 所以 $\sigma_a(T)$ 是闭集, 且包含 $\sigma(T)$ 的所有边界.

若 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$, 则 $\sigma(T)$ 是紧集且非空, 所以, $\sigma(T)$ 至少有一个边界点, 从而结论得证. □

定义 1.4.7 令 T 是 Hilbert 空间 X 中的线性算子, 称复数集

$$W(T) = \{(Tx, x) | x \in D(T), \|x\| = 1\} \quad (1.4.8)$$

为 T 的数值域 (numerical range).

令 T 是 Hilbert 空间 X 上的闭对称算子, $H_\lambda = N(\lambda I - T)^\perp$, 则 T 把 $N(\lambda I - T)$ 映到 $N(\lambda I - T)$ 中, 且 $T(H_\lambda \cap D(T)) \subset H_\lambda$, 因此, H_λ 是 T 的一个约化子空间. 定义 $T_\lambda = T\Big|_{H_\lambda}$, 即

$$D(T_\lambda) = H_\lambda \cap D(T),$$
$$T_\lambda x = Tx, \quad \forall x \in D(T_\lambda),$$

则 $\lambda I - T_\lambda$ 是一对一的, 且 $D(T_\lambda)$ 在 H_λ 中是稠密的, 所以 T_λ 是闭的对称线性算子.

定义 1.4.8 称

$$W_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (\lambda I - T)^{-1}\text{无界, 或} \dim N(\lambda I - T) = \infty\} \quad (1.4.9)$$

为 T 的本质谱核 (essential spectral kernel).

根据线性算子的值域或者预解算子的定义域划分如下.

定义 1.4.9 称

$$\sigma_{cp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\} \quad (1.4.10)$$

为线性算子 T 的压缩谱(compression spectrum).

定义 1.4.10　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 称集合

$$E_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | R(\lambda I - T)\text{非闭集}\} \tag{1.4.11}$$

为线性算子 T 的正则本质谱集 (regular essential spectrum).

根据线性算子的指数进行划分如下.

定义 1.4.11[20]　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 令

$$\Phi^+(T) = \{\lambda | R(T - \lambda I)\ \text{闭, 且}\ \mathrm{null}(\lambda I - T) < \infty\},$$
$$\Phi^-(T) = \{\lambda | R(T - \lambda I)\ \text{闭, 且}\ \mathrm{def}(\lambda I - T) < \infty\},$$

其中, $R(\lambda I - T)$ 是线性算子 $\lambda I - T$ 的值域, $\mathrm{null}(\lambda I - T) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ 是 $\lambda I - T$ 零空间的维数, $\mathrm{def}(\lambda I - T) = \dim Y/R(\lambda I - T)$ 是 $\lambda I - T$ 的亏指数, $\rho(T)$ 表示线性算子 T 的正则集. 记

$$\Phi_1(T) = \Phi^+(T) \cup \Phi^-(T);$$
$$\Phi_2(T) = \Phi^+(T);$$
$$\Phi_3(T) = \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T);$$
$$\Phi_4(T) = \{\lambda \in \Phi_3 \mid \mathrm{null}(\lambda I - T) = \mathrm{def}(\lambda I - T)\};$$
$$\Phi_5(T) = \{\lambda \in \Phi_4 \mid \text{存在}\ \lambda\ \text{的去心邻域包含在}\ \rho(T)\ \text{内}\},$$

称 $\sigma_{e_k} = \mathbb{C} \backslash \Phi_k(T)\ \ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$ 为线性算子 T 的本质谱类.

定义 1.4.12　设 X 是 Banach 空间, T 是稠定的闭线性算子, $C(X)$ 表示 X 上的所有紧线性算子的集合, 令 $\rho_K(T) = K_\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - T\text{是半 -Fredholm 算子}\}$,

$$K_\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho_K(T),$$

称 $K_\sigma(T)$ 为 T 的 Kato 本质谱.

令

$$\sigma_B(T) = \bigcap_{\substack{K \in C(X) \\ KT = TK}} \sigma(T + K), \quad \sigma_W(T) = \bigcap_{K \in C(X)} \sigma(T + K),$$

分别称 $\sigma_B(T)$ 和 $\sigma_W(T)$ 为线性算子 T 的 Browder 本质谱和 Weyl 本质谱.

另外, 还有根据特殊线性算子的其他特性给以的划分.

定义 1.4.13　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, $\tau \subset \sigma(T)$ 是 $\sigma(T)$ 的既开又闭子集, $E(\tau)$ 表示 τ 谱投影[163], 当 λ 是 $\sigma(T)$ 的孤立点时, 把 $E(\{\lambda\})$ 简记为 $E(\lambda)$. 设 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 是 $\sigma(\tau)$ 的孤立点, 如果 $\dim E(\lambda)X < \infty$, 则称 λ 为 T 的有限代数重数的孤立特征值, $\sigma_p^0(T)$ 表示 T 的具有有限代数重数的孤立特征值全体.

定义 1.4.14 设 $T=T_R+\mathrm{i}T_I$ 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 称集合

$$\sigma_{jp}(T)=\{\lambda=x+\mathrm{i}y\mid \exists f\in D(T),\text{使得 }(\lambda I-T)f=0\}$$

为线性算子 T 的联合点谱 (joint point spectrum); 称集合

$$\sigma_{ja}(T)=\left\{\lambda=x+\mathrm{i}y\mid \exists\{f_n\}\subset D(T),\text{使得 }\lim_{n\to\infty}(\lambda I-T)f_n=0\right\}$$

为线性算子 T 的联合近似点谱(joint approximate point spectrum). 其中, $T_{\Re}=T_R=\dfrac{T+T^*}{2}$, $T_{\Im}=T_I=\dfrac{T-T^*}{2\mathrm{i}}$ 分别是算子 T 的实部和虚部.

以下给出无界线性算子各种谱相互之间的关系, 限于篇幅, 一些定理的证明只标明出处, 其他未给出证明的定理可以按照定义直接证得.

定理 1.4.15 设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, $\lambda\in\sigma_{e_2}(T)$ 的充分必要条件是在空间 X 上存在 T 对应于 λ 的 Weyl 序列.

定理 1.4.16 设 X 是 Hilbert 空间, 则

(1) 如果 T 是自伴算子, 则 $\sigma_{e_k}(T)=\sigma_e(T)(k=1,2,3,4,5)$, 而且 λ 是 T 的特征值的充分必要条件是 $\lambda\in\sigma(T)\backslash\sigma_e(T)$;

(2) 如果 T 是 J-自伴算子, 则 $\sigma_{e_k}(T)=\sigma_e(T)(k=1,2,3,4)$, 而且 λ 是 T 的特征值的充分必要条件是 $\lambda\in\sigma(T)\backslash\sigma_e(T)$.

定理 1.4.17[159] 如果线性算子 T 是自伴算子或是 J-自伴算子, 则 T 的剩余谱是空集, 即

$$\sigma_r(T)=\varnothing.$$

对无界自伴和 J-自伴算子 T 而言, 如果 $\sigma_e(T)=\varnothing$, 则 $\sigma(T)=\sigma_d(T)$, 称算子 T 的谱是离散的 (discreteness).

定理 1.4.18[163] 任何下半有界的自伴算子 T 的谱是离散的当且仅当 T 的每个谱点都是它的孤立点.

定理 1.4.19[59] 任何线性算子 T 是自伴算子 (J-自伴算子)T_1 与 T_2 的直和, 则 $T=T_1\oplus T_2$ 是 Hilbert 空间 X 上的一个自伴算子 (J-自伴算子); 而且

$$\sigma(T)=\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2),\quad \sigma_p(T)=\sigma_p(T_1)\cup\sigma_p(T_2),$$
$$\sigma_c(T)=\sigma_c(T_1)\cup\sigma_c(T_2),\quad \sigma_d(T)=\sigma_d(T_1)\cup\sigma_d(T_2),$$
$$\sigma_e(T)=\sigma_e(T_1)\cup\sigma_e(T_2).$$

定理 1.4.20 设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 则

(1) $\sigma_c(T)\cup\sigma_p(T)\subset\sigma_a(T)$, 即 $\sigma_c(T)\subset\sigma_a(T)$ 且 $\sigma_p(T)\subset\sigma_a(T)$;

(2) 若 $\sigma_r(T)=\varnothing$, 则 $\sigma_a(T)=\sigma(T)$.

证明　(1) 由 $\sigma_p(T)$ 和 $\sigma_a(T)$ 的定义, 当 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 时, 显然有 $\lambda\in\sigma_a(T)$, 所以 $\sigma_p(T)\subset\sigma_a(T)$. 此外, 若 $\lambda\in\sigma_c(T)$, 则 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在但无界, 即 $\lambda I-T$ 不是下方有界的, 从而有 $\lambda\in\sigma_a(T)$, 即 $\sigma_c(T)\subset\sigma_a(T)$.

(2) 由 $\sigma_a(T)\subset\sigma(T)$ 及 $\sigma_r(T)=\varnothing$, 即有 $\sigma_a(T)=\sigma(T)$. □

定理 1.4.21　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子. 当 T 是正常算子时, $\sigma_{ja}(T)=\sigma_a(T)=\sigma(T)$.

定理 1.4.22　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 则

(1) $\sigma_{e_1}(T)\subset\sigma_{e_2}(T)\subset\sigma_{e_3}(T)\subset\sigma_{e_4}(T)\subset\sigma_{e_5}(T)$;

(2) $\Phi_1(T)=\rho_K(T),\sigma_{e_1}(T)=\sigma_K(T)$;

(3) $\Phi_3(T)=\rho_F(T),\sigma_{e_3}(T)=\sigma_F(T)$;

(4) $\sigma_{e_2}(T)=\sigma_e(T)$.

定理 1.4.23　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 则 $\sigma(T)=\sigma_a(T)\cup\sigma_{cp}(T)$, 其中 $\sigma_a(T)$ 与 $\sigma_{cp}(T)$ 可以相交.

证明　首先有下面的结论成立.

Hilbert 空间 X 上的线性算子 T 可逆的充要条件是 (1) 与 (2) 同时成立:

(1) 存在常数 $c>0$, 使得 $\forall x\in X$, $\|Tx\|\geqslant c\|x\|$;

(2) T 的值域 $R(T)$ 在 X 中稠密, 即 $\overline{R(T)}=X$.

根据上述结论, $\lambda I-T$ 可逆的充要条件是 (a) 与 (b) 同时成立:

(a) 存在常数 $c>0$, 使得 $\forall x\in X$, $\|(\lambda I-T)x\|\geqslant c\|x\|$;

(b) $\overline{R(\lambda I-T)}=X$.

再由 $\sigma_a(T)$ 与 $\sigma_{cp}(T)$ 的定义, 就可以得到 $\sigma(T)=\sigma_a(T)\cup\sigma_{cp}(T)$. □

注　定理 1.4.23 对讨论 T 的数值域 $W(T)$ 与 T 的谱 $\sigma(T)$ 之间的联系是很有效的.

定理 1.4.24　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 则

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)=\sigma_d(T)\cup\sigma_e(T).$$

定理 1.4.25　设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 则

(1) $\sigma_k(T)\subset\sigma_F(T),\sigma_W(T)\subset\sigma_B(T)$;

(2) 当$T\in B(X)$时, $\sigma_K(T)\subset\sigma_F(T)\subset\sigma_W(T)\subset\sigma_B(T)\subset\sigma(T)$;

(3)当$T\in B(X)$时, $\sigma_B(T)=\bigcap\limits_{\substack{K\in C(X)\\ KT=TK}}\sigma(T+K)=\sigma(T)\backslash\sigma_p^0(T)$;

(4) 当$T\in B(X)$时, $\sigma_W(T)=\bigcap\limits_{K\in C(X)}\sigma(T+K)=\sigma(T)\backslash\psi_0(T)$.

定理 1.4.26[16] 设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子, 则

(1) $\sigma_F(T) \subset \sigma(T)$, 且 $\sigma_F(T)$ 是 $\sigma(T)$ 的闭子集;

(2) 若 $\dim X = \infty$, 则 $\sigma_F(T) \neq \varnothing$;

(3) $\sigma_F(T) = \sigma_F(T^*)$;

(4) 若 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个 n 次多项式, 则

$$\sigma_F(p(T)) = p(\sigma_F(T)).$$

定理 1.4.27[140] 设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子,

(1) 若 T 是闭的正常算子, 则 $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$;

(2) 若 T 是 X 上的闭对称算子, 则 $W_e(T) \subset \sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset \mathbb{R}$;

(3) 若 T 是自伴算子 (或 J-自伴算子), 则 $W_e(T) = \sigma_e(T)$.

定理 1.4.28[157] 设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个稠定的闭线性算子,

(1)

$$\rho(T) \subset \Pi(T), \quad K_\sigma(T) \subset \sigma(T);$$

(2) 若 T 是自伴算子 (或 J-自伴算子), 则 $\rho(T) = \Pi(T)$.

定理 1.4.29[157] 若 T_1 是线性算子 $T : D(T) \to X$ 的线性扩张, 则

$$\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T_1), \quad \sigma_r(T) \supset \sigma_r(T_1), \quad \sigma_c(T) \subset \sigma_c(T_1) \cup \sigma_p(T_1).$$

定理 1.4.30[157] 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的闭对称算子,

(1) 若 T_1 是 T 的一个闭的对称扩张, 则 $W(T) \subset W(T_1)$ 且 $W_e(T) \subset W_e(T_1)$;

(2) 若 T_1 是 T 的一个有限维对称扩张, 则 $W_e(T) = W_e(T_1)$.

谱点的其他分类, 如联合谱、联合近似谱、正则型点 $\Pi(A)$ 和谱核等, 相互之间也存在一定的关系, 这里不再一一赘述, 有兴趣的读者可参阅相关资料和文献.

设 $T \in L(X, Y)$ 是一个稠定线性算子, T^* 表示 T 的共轭算子, 关于 T 和 T^* 的状态作如下分类.

Ⅰ: $R(T) = Y$; Ⅱ: $\overline{R(T)} = Y$, 但 $R(T) \neq Y$; Ⅲ: $\overline{R(T)} \neq Y$.

1: T^{-1} 存在且有界; 2: T^{-1} 存在但无界; 3: T^{-1} 不存在.

图 1.4.1 给出各种分类不可能发生的条件. 其中阴影部分表示不论空间 X,Y 和算子 T 满足什么样的条件, 都不可能发生; “Y”表示 Y 是完备空间时不可能发生; “X”表示 X 是完备空间且 T 是闭的时不可能发生; “$X-R$”表示 X 是自反空间且 T 是闭的时不可能发生.

根据上面分类, 谱表示可以简单化: Ⅰ 2 不可能 (Y 是完备空间)

(1) $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in$ Ⅰ 1;

(2) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in$ Ⅰ 3 $\cup$ Ⅱ 1 $\cup$ Ⅱ 2 $\cup$ Ⅱ 3 $\cup$ Ⅲ 1 $\cup$ Ⅲ 2 $\cup$ Ⅲ 3;

(3) $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in \text{I } 3 \cup \text{II } 3 \cup \text{III } 3$;

(4) $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in \text{II } 1 \cup \text{II } 2$;

(5) $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in \text{III } 1 \cup \text{III } 2$;

(6) $\lambda \in \sigma_a(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in \sigma(T)$, 但 $\lambda \notin \text{III } 1$;

(7) $\lambda \in \sigma_F(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T) \in (\text{ I } 3$ 且 $\text{nul}(T - \lambda I) = \infty) \cup (\text{ II } 3$ 且 $\text{nul}(T - \lambda I) = \infty)$
$\cup (\text{III } 1$ 且 $\text{def}(T - \lambda I) = \infty) \cup (\text{III } 2$ 且 $\text{def}(T - \lambda I) = \infty)$
$\cup (\text{ III } 3$ 且 $\max\{\text{nul}(T - \lambda I), \text{def}(T - \lambda I)\} = \infty)$.

$T^*\uparrow$	I1	I2	I3	II1	II2	II3	III1	III2	III3
III3								$X-R$	
III2		Y $Y-R$	Y		$X-R$				
III1		X			X	X			
II3									
II2		Y							
II1									
I3									
I2									
I1				X					

$T\rightarrow$

图 1.4.1　各种分类不可能发生的条件

第 2 章　正常算子与自伴算子的谱分解

首先考察高等代数中介绍的实对称矩阵的特征子空间.

例 2.0.1　设 A 是 $n\times n$ 阶实对称矩阵 (Hermite 矩阵), 则 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个有界线性自伴算子. 设 A 具有 m 个特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ $(m\leqslant n)$, 它们的重数分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_m$, 并且

$$l_1+l_2+\cdots+l_m=n.$$

对应 $\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 的特征子空间为 $N_i=\{x\in\mathbb{R}^n\mid Ax=\lambda_i x\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 由高等代数知识可知, $N_i\subset\mathbb{R}^n$ 是 A 的不变子空间, 且 N_i 的维数等于 $l_i(i=1,2,\cdots,m)$.

在 N_i 中取一组规范正交基$x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{il_i}(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $\{x_{ij}|j=1,2,\cdots,l_i;\ i=1,2,\cdots,m\}$ 形成 $\mathbb{R}^n$ 中的一组规范正交基, $\forall x\in\mathbb{R}^n$,　$\exists\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, s.t.

$$x=\alpha_1x_{11}+\alpha_2x_{12}+\cdots+\alpha_kx_{i1}+\cdots+\alpha_nx_{ml_m}.$$

记 $P_ix=\alpha_kx_{i1}+\cdots+\alpha_jx_{il_i}$, 称之为 $\mathbb{R}^n$ 在 N_i 上的投影算子, $\forall x\in\mathbb{R}^n$,

$$AP_ix=\lambda_iP_ix; \tag{2.0.1}$$

$$x=\sum_{i=1}^{m}P_ix; \tag{2.0.2}$$

$$Ax=\sum_{i=1}^{m}\lambda_iP_ix. \tag{2.0.3}$$

称式 (2.0.2) 为向量 x 在对称矩阵 A 的特征空间下的特征展开 (谱分解).

反过来, 如果已知实对称矩阵 A 的特征系或某些特征, 要求出实对称矩阵 A, 这一过程称为逆问题(inverse problem).

例 2.0.1 中介绍了在有限维空间上实对称矩阵 A 的特征系, 以及 A 作用于某个向量可以表示为几个向量的和的形式 (2.0.3). 定义在无穷维空间上的算子是否也具有类似的表示形式, 或者有其他更为简洁的表示形式? 本章重点给出无穷维空间上的几类特殊算子的谱分解定理.

2.1　投 影 算 子

定义 2.1.1　设 X 是无穷维 Hilbert 空间, $P\in B(X)$, 若

(1) P 是自伴算子;

(2) $P^2 = P$,

则称 P 是 X 上的投影算子 (projection).

易证, 对任意的 $x \in X$, 都有

$$\|Px\| \leqslant \|x\|, \tag{2.1.1}$$

且 $\|P\| = 1$.

例 2.0.1 中所讨论问题中的 P_i 显然是投影算子. 一般情况下两个投影算子的和、差以及积不一定是投影算子.

定理 2.1.2　Hilbert 空间 X 上的投影算子 P_1 和 P_2 的乘积 P_1P_2 仍然是投影算子的充要条件是 P_1, P_2 可交换, 即

$$P_1P_2 = P_2P_1. \tag{2.1.2}$$

证明　设 P_1, P_2 是投影算子, 若 P_1, P_2 可交换, 则

$$(P_1P_2)(P_1P_2) = (P_1P_2)(P_2P_1) = P_1P_2P_1 = P_1P_1P_2 = P_1P_2,$$
$$(P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1 = P_1P_2,$$

故 P_1P_2 是投影算子.

反之, 若 P_1P_2 是投影算子, 则

$$P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1.$$

□

定理 2.1.3　设 P_1, P_2 是 Hilbert 空间 X 上的投影算子, 则以下三个条件等价:

(1) 和 $P_1 + P_2$ 是投影算子;

(2)

$$P_1P_2 = 0 \quad (\text{或者/且 } P_2P_1 = 0\ ); \tag{2.1.3}$$

(3) P_1 的值域 M_1 与 P_2 的值域 M_2 直交, 即 $\forall x \in M_1, y \in M_2$ 有 $x \perp y$.

证明　$(1) \overset{(a)}{\Rightarrow} (2) \overset{(b)}{\Rightarrow} (3) \overset{(c)}{\Rightarrow} (1)$.

(a) 若 $P_1 + P_2$ 是投影算子, 则

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 \\ &= P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad P_1P_2 + P_2P_1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} P_1^2P_2 + P_1P_2P_1 = 0 \Rightarrow P_1P_2 = -P_1P_2P_1 \\ P_1P_2P_1 + P_2P_1^2 = 0 \Rightarrow P_2P_1 = -P_1P_2P_1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad P_1P_2 = P_2P_1 = 0.$$

(b) 设 $P_1P_2=0$. $\forall y_1\in M_1$, $\forall y_2\in M_2$, $\exists x_1,x_2\in X$, 使得$P_1x_1=y_1$, $P_2x_2=y_2$, 于是

$$(y_1,y_2)=(P_1x_1,P_2x_2)=(x_1,P_1^*P_2x_2)=(x_1,P_1P_2x_2)=0.$$

(c) 若 $\forall y_1\in M_1$, $y_2\in M_2$, 都有 $(y_1,y_2)=0$, 令

$$M=\{y_1+y_2 \mid y_1\in M_1,y_2\in M_2\}=M_1+M_2,$$

则 $\forall x\in X$, 有直和分解$x=y+z$, 其中, $y\in M$, $z\in M^\perp$. 设 $y=y_1+y_2$, $y_1\in M_1$, $y_2\in M_2$. 显然, $P_1y=y_1$、$P_2y=y_2$, 所以 $(P_1+P_2)x=P_1x+P_2x=y_1+y_2=y$, 故 P_1+P_2 是 M 上的投影算子. □

定义 2.1.4 设 P_1,P_2 是 Hilbert 空间 X 上的投影算子, 若 $P_1X\subset P_2X$, 则称 P_1 是 P_2 的部分算子, 即 $\forall x\in P_1X$, 都有 $P_1x=P_2x$, 记为 $P_1\leqslant P_2$.

引理 2.1.5 设 P_1 和 P_2 是 Hilbert 空间 X 上的投影算子, 则以下三个条件等价:

(1) P_1 是 P_2 的部分算子;

(2)

$$P_1P_2=P_2P_1=P_1; \tag{2.1.4}$$

(3)

$$\forall x\in X,\quad \|P_1x\|\leqslant\|P_2x\|. \tag{2.1.5}$$

证明 $(1)\overset{(a)}{\Rightarrow}(2)\overset{(b)}{\Rightarrow}(3)\overset{(c)}{\Rightarrow}(1)$.

(a) 设 P_1 是 P_2 的部分算子, 对 $\forall x\in X$, 由于 $P_1x\in M_1$ $(P_1X=M_1)$, 所以, $P_2P_1x=P_1x$, 即 $P_2P_1=P_1$. 两边取共轭得 $(P_2P_1)^*=P_1^*=P_1$, 而 $(P_2P_1)^*=P_1^*P_2^*=P_1P_2$, 故 $P_1P_2=P_2P_1=P_1$.

(b) 设 $P_1P_2=P_2P_1=P_1$, 则由式 (2.1.1), 对 $\forall x\in X$, 有

$$\|P_1x\|=\|P_1P_2x\|\leqslant\|P_2x\|.$$

(c) 反证法. 若 P_1 不是 P_2 的部分算子, 则 $\exists x_0\in P_1X$, 但 $x_0\notin P_2X$, 令 $\widehat{x}_0=P_2x_0$ 是 x_0 在 P_2X 中的正交投影, 则 $\|P_2x_0\|=\|\widehat{x}_0\|<\|x_0\|=\|P_1x_0\|$, 这与 $\|P_1x\|\leqslant\|P_2x\|$ $(\forall x\in X)$ 矛盾, 故 P_1 是 P_2 的部分算子. □

定理 2.1.6 两个投影算子 P_1,P_2 的差 P_2-P_1 仍然是投影算子的充分必要条件是 P_1 是 P_2 的部分算子.

证明 设 P_2-P_1 是投影算子, 记 $P_3=P_2-P_1$, 则 $P_2=P_1+P_3$, 由此可知, $P_1X\subset P_2X$, 因此 P_1 是 P_2 的部分算子.

反之, 设 P_1 是 P_2 的部分算子, 则由引理 2.1.5 的条件 (2) 得

$$(P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1^2 = P_2 - P_1, \tag{2.1.6}$$

又 $(P_2 - P_1)^* = P_2^* - P_1^* = P_2 - P_1$, 故 $P_2 - P_1$ 是投影算子. □

设 A 为 X 上的线性算子, M 为 X 的子空间. 若 $\forall f \in M$, 都有 $Af \in M$, 则称 M 为 A 的不变子空间; 若 M 及 $M^\perp = X - M$ 均为 A 的不变子空间, 则称算子 A 被 M 所约化. 一个算子若被一个子空间所约化, 则它就可以归结为在约化空间及其正交补的两个子空间上的两个独立线性算子的和, 即

$$X = M \oplus M^\perp, \tag{2.1.7}$$

而 $A = A_1 \oplus A_2$, 其中, $A_1 = A : M \to M,\ \ A_2 : M^\perp \to M^\perp$.

命题 2.1.7 设 M 是 X 的子空间, P 为 M 上的投影算子, 则线性算子 A 被 M 所约化的充分必要条件是

$$AP = PA. \tag{2.1.8}$$

证明 若 $AP = PA$, 则对任取的 $f \in M,\ g \in M^\perp$, 都有 $Af = APf = PAf \in M$, 而

$$(Ag, f) = (Ag, Pf) = (PAg, f) = (APg, f) = (0, f) = 0, \tag{2.1.9}$$

所以 $Ag \perp f$, 从而 $Ag \in M^\perp$, 因此 A 被 M 所约化.

反之, 若 A 被 M 所约化, 则对 $\forall f \in H$ 都有正交分解 $f = f_1 + f_2$, 其中, $f_1 \in M,\ \ f_2 \in M^\perp$, 从而 $APf = Af_1$, 而 $PAf = P(Af_1 + Af_2) = PAf_1 = Af_1$, 故 $AP = PA$. □

2.2 谱族 (谱测度) 和谱积分 (算子积分)

2.2.1 定义在实轴上的谱族

为了研究自伴算子和正常算子的谱分解, 需引入谱族的概念, 这里先给出定义在实轴上的谱族.

定义 2.2.1 设 $\{E_\lambda\}$ 是定义在无穷维 Hilbert 空间 X 内一个含实参数 λ 的投影算子族, 若满足条件

(1) 单调性: 当 $\lambda < \mu$ 时, $E_\lambda \leqslant E_\mu$;

(2) 右连续: 对任何实数 λ, $\lim\limits_{\mu \to \lambda+} E_\mu = E_\lambda$;

(3) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0,\quad \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = I,$

则 $\{E_\lambda\}$ 称为谱族 (谱测度)(spectral family, spectral measure), 其中, 极限都是在强收敛意义下的极限.

谱族 $\{E_\lambda\}$ 具有如下性质:

(1) 若 $\lambda < \mu$, 则 $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$;

(2) 若 $\Delta = [\alpha, \beta]$, $\Delta' = [\alpha', \beta']$, $\Delta E_\lambda = E_\beta - E_\alpha$, $\Delta' E_\lambda = E_{\beta'} - E_{\alpha'}$, 则当 $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$ 时, $\Delta E_\lambda \Delta' E_\lambda = 0$, 当 $\Delta \cap \Delta' = \Delta''$ 时, $\Delta E_\lambda \Delta' E_\lambda = \Delta'' E_\lambda$;

(3) 对于任何 $f \in X$, $\rho(\lambda) = (E_\lambda f, f) = \|E_\lambda f\|^2$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上关于 λ 的非负单调非减函数, 并且 $\rho(-\infty) = 0$, $\rho(\infty) = \|f\|^2$.

上述性质可根据引理 2.1.5 和定理 2.1.6 证得.

例 2.2.2 设 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ 为一列递增的实数, 且 $\lambda_j \to \infty\ (j \to \infty)$, $\{P_{\lambda_j}\}$是无穷维 Hilbert 空间 H 上的投影算子族, 且两两相互正交, 即 $P_{\lambda_j} P_{\lambda_i} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ P_{\lambda_i}, & i = j, \end{cases}$ 而且 $H = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus P_{\lambda_j} H$, 令 $E(\lambda) = \sum_{\lambda_i \leqslant \lambda} P_{\lambda_i}$, 则对 $\forall f \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda) f = \sum_{\lambda_i \leqslant \lambda} P_{\lambda_i} f$. 容易验证 $\{E(\lambda)\}$ 是 H 上的一个谱族.

设 $[\alpha, \beta]$ 为一有限区间, 作分划 $D_n : \alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = \beta$. 令 $\Delta_i = [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, $\delta = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_{i-1})$. 对于给定的谱族 $\{E_\lambda\}$ 及任一实函数 $\mu(\lambda) \in C[\alpha, \beta]$, 作 Riemann 和

$$S(D_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i) \Delta_i E_\lambda, \tag{2.2.1}$$

其中, ξ_i 是 Δ_i 上的任意一点, $\Delta_i E_\lambda = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$.

定理 2.2.3 若 $\mu(\lambda)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 则 $\lim_{\delta \to 0} S(D_n)$ 按范数收敛.

证明 $\mu(\lambda)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 从而一致连续, 于是, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall \lambda, \lambda' \in [\alpha, \beta]$, 只要 $|\lambda - \lambda'| < \delta$, 就有

$$|\mu(\lambda) - \mu(\lambda')| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.2.2}$$

在 $[\alpha, \beta]$ 上任意作两个分划

$$D_n : \alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \beta,$$

$$D_m : \alpha = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m = \beta,$$

满足 $\max_i |\lambda_i - \lambda_{i-1}| < \delta$ 和 $\max_i |\nu_i - \nu_{i-1}| < \delta$.

再将 D_n 与 D_m 的分划点合并在一起得到新的分划

$$D_p : \alpha = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_p = \beta.$$

根据谱族的性质可得

$$-\frac{\varepsilon}{2}I \leqslant S(D_p) - S(D_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}I,$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}I \leqslant S(D_p) - S(D_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}I,$$

从而

$$-\varepsilon I < S(D_n) - S(D_m) < \varepsilon I,$$

因此,

$$\|S(D_n) - S(D_m)\| < \varepsilon.$$

所以, $S(D_n)$ 按范数的极限存在, 即 $\lim\limits_{\delta\to 0} S(D_n)$ 按范数收敛. □

由上面讨论可知, 当 $\delta \to 0$ 时, $S(D_n)$ 趋于唯一的一个极限算子, 令

$$\lim_{\delta\to 0} S(D_n) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda = \int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda,$$

显然, 极限 $\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 是一个线性算子, 称为谱积分 (算子积分)(spectral integral, operator integral).

定理 2.2.4 如果 $\{E_\lambda\}$ 是定义在无穷维 Hilbert 空间 X 上的谱族, 实函数 $\mu(\lambda) \in C[\alpha, \beta]$, 则

(1) $\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 是自伴算子;

(2) $\forall f, g \in H$,

$$\left(\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f, g\right) = \int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f, g), \tag{2.2.3}$$

特别地,

$$\left\|\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f\right\|^2 = \int_\alpha^\beta |\mu(\lambda)|\mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2; \tag{2.2.4}$$

(3)

$$\left\|\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right\| \leqslant \max_{\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta} |\mu(\lambda)|. \tag{2.2.5}$$

证明 (1) 由于 $S(D_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda$, 而 $\{\Delta_i E_\lambda\}_{i=1}^{n}$ 是相互正交的投影算

子, 故 $S(D_n)$ 也是自伴算子. 又由内积的连续性, 极限算子必是自伴算子.

(2) 对于分划 $D_n: \alpha=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\beta$, 令 $\Delta' E_\lambda = I-E_\beta, \Delta'' E_\lambda = E_\alpha$, 则对任意 $f,g\in X$, 有正交分解

$$g=\Delta' E_\lambda g+\Delta'' E_\lambda g+\sum_{i=1}^{n}\Delta_i E_\lambda g,$$

于是

$$\begin{aligned}(S(D_n)f,g)&=\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda f, \Delta' E_\lambda g+\Delta'' E_\lambda g+\sum_{i=1}^{n}\Delta_i E_\lambda g\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda f. \sum_{i=1}^{n}\Delta_i E_\lambda g\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)(\Delta_i E_\lambda f,g).\end{aligned}$$

令 $\sigma(\lambda)=(E_\lambda f,g)$, 则

$$(\Delta_i E_\lambda f,g)=\sigma(\lambda_i)-\sigma(\lambda_{i-1})=\Delta_i\sigma(\lambda),$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\sigma(\lambda)|&=\sum_{i=1}^{n}|(\Delta_i E_\lambda f,g)|\\&=\sum_{i=1}^{n}|(\Delta_i E_\lambda f,\Delta_i E_\lambda g)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|\Delta_i E_\lambda f\|\cdot\|\Delta_i E_\lambda g\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\|\Delta_i E_\lambda f\|^2+\|\Delta_i E_\lambda g\|^2),\end{aligned}$$

从而,

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\sigma(\lambda)|\leqslant\frac{1}{2}(\|f\|^2+\|g\|^2),$$

因此, $\sigma(\lambda)$ 是有界变差函数. 于是

$$\lim_{\delta\to0}(S(D_n)f,g)=\lim_{\delta\to0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\Delta_i\sigma(\lambda),$$

即

$$\left(\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f,g\right)=\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}\sigma(\lambda)=\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,g).$$

又由于 $\|S(D_n)f\|^2=(S(D_n)f,S(D_n)f)$, 所以,

$$\left(\sum_{i=1}^n\mu(\xi_i)\Delta_iE_\lambda f,\sum_{i=1}^n\mu(\xi_i)\Delta_iE_\lambda f\right)=\sum_{i=1}^n\mu^2(\xi_i)\|\Delta_iE_\lambda f\|^2.$$

当 $\delta\to 0$ 时, 得

$$\left\|\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f\right\|^2=\int_\alpha^\beta\mu^2(\lambda)\mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2.$$

(3) 令 $M=\max\limits_{\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta}|\mu(\lambda)|$, 则

$$\left\|\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f\right\|^2=\int_\alpha^\beta\mu^2(\lambda)\mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2\leqslant M^2\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2\leqslant M^2\|f\|^2,$$

即 $\left\|\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right\|\leqslant M.$ □

综合上述结论可以看出, 当谱族确定时, 利用谱积分可以将 $[\alpha,\beta]$ 上的任一实值连续函数 $\mu(\lambda)$ 对应到空间 $B(X)$ 上的一个有界对称算子(自伴算子), 把这种对应关系记为

$$F(\mu)=\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda,\tag{2.2.6}$$

则 $F(\mu)$ 是有界对称算子, 即 $F:C[\alpha,\beta]\ni\mu(\lambda)\mapsto F(\mu)\in B(X)$.

上述结论也可以扩充到复值连续函数上. 设 $\mu=\mu_1+\mathrm{i}\mu_2$, 其中, $\mu_1(\lambda),\mu_2(\lambda)\in C[\alpha,\beta]$ 是实值函数, 则

$$F(\mu)=\int_\alpha^\beta\mu_1(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta\mu_2(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.\tag{2.2.7}$$

F 将一个 $C[\alpha,\beta]$ 上的复值连续函数 μ 对应到 $B(X)$ 上的一个有界算子 $F(\mu)$, 但不再具有对称性, 而是具有以下性质.

定理 2.2.5

(1) $F(c_1\mu+c_2\nu)=c_1F(\mu)+c_2F(\nu)$;　(2.2.8)

(2) $F(\mu\nu)=F(\mu)F(\nu)$;　(2.2.9)

(3) $F(\mu)^*=F(\overline{\mu})$;　(2.2.10)

(4) $\mu(\lambda)\geqslant 0\ \ (\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta)\ \ \Rightarrow\ \ F(\mu)\geqslant 0$.

证明　(1) 线性性显然.

(2) 对于 $[\alpha,\beta]$ 的同一个分划 $\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\beta$, 分别作 Riemann 和

$$S(D_n)_\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda,$$

$$S(D_n)_\nu=\sum_{i=1}^{n}\nu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda.$$

由 $\Delta_i E_\lambda\Delta_j E_\lambda=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \Delta_i E_\lambda, & i=j,\end{cases}$ 得

$$S(D_n)_\mu S(D_n)_\nu=\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\nu(\xi_i)\Delta_i E_\lambda=S(D_n)_{\mu\nu},$$

令 $\delta\to 0$, 有

$$\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\int_\alpha^\beta \nu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\nu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

(3) 若 $\mu(\lambda)=\mu_1(\lambda)+\mathrm{i}\mu_2(\lambda)$, 则对于任意的 $f,g\in X$,

$$\begin{aligned}(F(\mu)f,g)&=(F(\mu_1)f,g)+\mathrm{i}(F(\mu_2)f,g)\\&=\int_\alpha^\beta \mu_1(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,g)+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta \mu_2(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,g).\end{aligned}$$

由于 $(E_\lambda f,g)=(f,E_\lambda g)=\overline{(E_\lambda g,f)}$, 且 $\mu_1(\lambda)$ 和 $\mu_2(\lambda)$ 是实值函数, 所以

$$\begin{aligned}(f,F(\mu)^*g)&=(F(\mu)f,g)=\int_\alpha^\beta \mu_1(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,g)+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta \mu_2(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,g)\\&=\int_\alpha^\beta \overline{\mu_1(\lambda)}\mathrm{d}\overline{(E_\lambda g,f)}+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta \overline{\mu_2(\lambda)}\mathrm{d}\overline{(E_\lambda g,f)}\\&=\overline{\int_\alpha^\beta \mu_1(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda g,f)}+\mathrm{i}\overline{\int_\alpha^\beta \mu_2(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda g,f)}\\&=\overline{(F(\mu_1)g,f)}+\mathrm{i}\overline{(F(\mu_2)g,f)}\\&=(f,F(\mu_1)g-\mathrm{i}F(\mu_2)g)=(f,F(\overline{\mu})g).\end{aligned}$$

(4) 若 $\mu(\lambda)\geqslant 0\ \ (\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta)$, 则

$$(F(\mu)f,f)=\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,f)=\int_\alpha^\beta \mu(\lambda)\mathrm{d}\|E_\lambda\|^2\geqslant 0.$$

□

由定理 2.2.5 得到 $F^*(\mu)F(\mu)=F(\overline{\mu})F(\mu)=F(\mu)F^*(\mu)$, 所以, $F(\mu)$ 是一个有界正常算子, 即 F 将一个 $C[\alpha,\beta]$ 上的复值连续函数 $\mu(\lambda)$ 对应到 $B(X)$ 上的一个有界正常算子$F(\mu)$.

我们可以将定理 2.2.3~ 定理 2.2.5 推广到无界算子上. 设 $\mu(\lambda)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数, $D(\mu)$ 记为 X 中的如下集合

$$D(\mu)=\left\{f\in X\middle|\int_{-\infty}^{\infty}|\mu(\lambda)|^2\ \mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2<\infty\right\}, \tag{2.2.11}$$

则对任何 $f\in D(\mu)$, 定理 2.2.4 和定理 2.2.5 均成立. 若令 $F'(\mu)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\lambda)\ \mathrm{d}E_\lambda$, 则有如下定理.

定理 2.2.6 如果 $\{E_\lambda\}$ 是定义在无穷维 Hilbert 空间 X 上的谱族, $\mu(\lambda)$ 为定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续实函数, 则

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 是自伴算子;

(2) $\forall f,g\in D(\mu)$, 有

$$\left(\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f,g\right)=\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda f,g), \tag{2.2.12}$$

$$\left\|\int_\alpha^\beta\mu(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f\right\|^2=\int_\alpha^\beta|\mu(\lambda)|^2\mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2. \tag{2.2.13}$$

定理 2.2.7 (1) $\forall f\in D(\mu)\cap D(\nu)$,

$$F'(c_1\mu+c_2\nu)f=c_1F'(\mu)f+c_2F'(\nu)f; \tag{2.2.14}$$

(2) $\forall f\in D(\nu)\cap D(\mu\nu)$,

$$F'(\mu\nu)f=F'(\mu)F'(\nu)f; \tag{2.2.15}$$

(3)

$$F'(\mu)^*=F'(\overline{\mu}); \tag{2.2.16}$$

(4) 若在 $(-\infty,\infty)$ 上恒有 $\mu(\lambda)\geqslant 0$, 则在 $D(\mu)$ 上, $F'(\mu)\geqslant 0$.

同理, F' 将 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一实值连续函数 $\mu(\lambda)$ 对应到空间 $L(X)$ 上的一个自伴算子, 将 $(-\infty,+\infty)$上的复值连续函数$\mu(\lambda)$ 对应到 $L(X)$上的一个正常算子.

2.2.2 定义在 Borel 集上的谱族

2.2.1 小节中的结论也可以扩充到一般的局部紧拓扑空间上. 设 K 是一个局部紧拓扑空间, $\mathcal{B}$ 是 K 上的一切 Borel 子集组成的集合类, 设 X 是 Hilbert 空间, 用 $P(X)$ 表示 X 上的投影算子的全体.

定义 2.2.8 设 E 是 $\mathcal{B}$ 到 $P(X)$ 的一个映射, 满足条件:

(1) $E(X)=I,\quad E(\varnothing)=\theta$;

(2) 对于 $\mathcal{B}$ 中互不相交的 Borel 集序列 $\{A_i\}$,

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}E(A_i), \tag{2.2.17}$$

其中 s-lim 表示算子的强极限, 称三元组 $(K,\mathcal{B},E)$ 是一个谱族.

显然谱族 $(K,\mathcal{B},E)$ 有下列性质:

(1) $E(\varnothing)=0$;

(2) $\forall A_i\in\mathcal{B}\ \ (i=1,2,\cdots,n),\ A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$, 都有

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(A_i); \tag{2.2.18}$$

(3) 若 $A_1,A_2\in\mathcal{B}$, 则

$$E(A_1\cap A_2)=E(A_1)E(A_2). \tag{2.2.19}$$

从上述定义和性质可以看出: 谱族 E 是测度空间$(K,\mathcal{B})$ 上一个取值于 Hilbert 空间 X 上的投影算子的测度. 为了便于研究, 引入 Riesz 表示定理.

定理 2.2.9 若 M 是一个 Hausdorff 紧空间, 则 $\forall f\in C(M)^*$ 都有唯一的复值 Baire 测度, 即存在完全可加的集函数 μ, 使得 $|\mu(M)|<\infty$, 且满足 $\forall\varphi\in C(M)$

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_M\varphi(z)\mathrm{d}\mu, \tag{2.2.20}$$

其中, $C(M)^*=BV(M)$.

在 $BV(M)$ 上引入范数 $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(z)||z\in M\}$, 则 $\forall x,y\in X,\ \ \forall\varphi\in C(M)\subset BV(M)$, 映射

$$\varphi\mapsto(\varphi(M)x,y)$$

可以看成是 $C(M)$ 上的一个连续线性泛函, 并且

$$|(\varphi(M)x,y)|\leqslant\|\varphi(M)\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|=\|\varphi\|_{C(M)}\cdot\|x\|\cdot\|y\|.$$

由 Riesz 表示定理, 存在 M 上的复 Borel 测度 $m_{x,y}$, 使得

$$(\varphi(M)x,y)=\int_M\varphi(z)m_{x,y}(\mathrm{d}z),$$

称 $m_{x,y}(\mathrm{d}z)$ 为与 $x,y\in X$ 相关联的 $(M,\mathcal{B})$ 的测度. $m_{x,y}$ 是复值集函数, 对 M 上的任意 Borel 集 Ω, 有

$$m_{x,y}(\Omega)=\int_\Omega m_{x,y}(\mathrm{d}z).$$

测度 $m_{x,y}$ 具有完全可加性, 即对于 M 中两两互不相交的 Borel 可测集 Ω_1, $\Omega_2, \cdots$, 有

$$m_{x,y}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m_{x,y}(\Omega_n),$$

而且还具有如下性质:

(1)

$$\int_M |m_{x,y}(\mathrm{d}z)| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi\in C(M)}}\left|\int_M \varphi(z)m_{x,y}(\mathrm{d}z)\right| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi\in C(M)}}|(\varphi(M)x,y)|\leqslant \|x\|\cdot\|y\|;$$

(2) 对于任意的 Borel 集 $\Omega\subset M$, $m_{x,y}(\Omega)$ 关于 x,y 是双线性的, 即

$$m_{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\,y}(\Omega)=\alpha_1\,m_{x_1,y}(\Omega)+\alpha_2\,m_{x_2,y}(\Omega),$$
$$m_{x,\,\beta_1y_1+\beta_2y_2}(\Omega)=\overline{\beta_1}\,m_{x,y_1}(\Omega)+\overline{\beta_2}\,m_{x,y_2}(\Omega).$$

若 $\psi\in BV(M)=C(M)^*$, $\forall x,y\in X$, 令

$$a_\psi(x,y)=\int_M \psi(z)m_{x,y}(\mathrm{d}z),$$

则 $a_\psi(x,y)$ 是 $X\times X$ 上的一个双线性泛函, 而且

$$|a_\psi(x,y)|\leqslant\|\psi\|_{BV(M)}\int_M|m_{x,y}(\mathrm{d}z)|\leqslant\|\psi\|_{BV(M)}\|x\|\cdot\|y\|.$$

由 Riesz 表示定理, 存在唯一有界线性算子, 记为 $\psi(M)$, 满足

$$(\psi(M)x,y)=\int_M\psi(z)m_{x,y}(\mathrm{d}z),$$

并得到 $BV(M)$ 到 $B(X)$ 上的一个映射

$$\tau:\psi\mapsto\psi(M).$$

若 $M\subset K=\mathbb{C}$, $(K,\mathcal{B},E)$ 是谱族, 则 $\forall x,y\in X$, $\Omega\in\mathcal{B}$,

$$(E(\Omega)x,y)=\int_{\Omega\cap M}m_{x,y}(\mathrm{d}z),$$

对于 $z\in\mathbb{C}$, 记 $\Omega_z=\{s+\mathrm{i}t\in M\big|s\leqslant\Re z,t\leqslant\Im z\}$, 令 $E(z)=E(\Omega_z)$, $m_{x,y}(z)=m_{x,y}(\Omega_z)$, 则 $m_{x,y}(z)=(E(z)x,y)$. 从而式 (2.2.21) 转化为下列形式

$$(\psi(M)x,y)=\int_M\psi(z)\mathrm{d}m_{x,y}(z).$$

更一般地有如下结论.

定理 2.2.10 设 X 是 Hilbert 空间, M 是 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集, $(\mathbb{C},\mathcal{B},E)$ 是由按如下方式定义的谱族, $E:\mathcal{B}\mapsto P(X)$,

$$E(\Omega)=\tau\chi_{\Omega\cap M},\quad \forall\Omega\in\mathcal{B}, \tag{2.2.21}$$

其中 χ_Λ 表示 Borel 集 Λ 上的特征函数

$$\chi_\Lambda(z)=\begin{cases}1, & z\in\Lambda,\\ 0, & z\notin\Lambda,\end{cases} \tag{2.2.22}$$

若 $U\cap M=\varnothing$, 则 $E(U)=\theta$, $E(\mathbb{C})=E(M)=I$.

对于任意的 $\varphi\in BV(M)$, 存在唯一的算子 $\varphi(M)\in B(X)$, 使得 $\forall x,y\in X$,

$$(\varphi(M)x,y)=\int_M\varphi(z)\mathrm{d}(E(z)x,y), \tag{2.2.23}$$

而且

$$\varphi(M)=\int_M\varphi(z)\mathrm{d}E(z) \tag{2.2.24}$$

在一致意义下收敛.

证明 只需证一致收敛即可. 设 $\varphi(z)=\mu(z)+\mathrm{i}\nu(z)\in BV(M)$ 满足 $k\leqslant\mu(z)\leqslant K$, $l\leqslant\nu(z)\leqslant L$, 对于任意分划 D:

$$k=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=K,$$
$$l=b_0<b_1<b_2<\cdots<b_n=L,$$

任取 $\xi_p\in[a_{p-1},a_p],\quad \eta_q\in[b_{q-1},b_q]\quad(p,q=1,2,\cdots,n)$, 作和

$$S_D=\sum_{p,q}(\xi_p+\mathrm{i}\eta_q)E(\Delta_{pq}), \tag{2.2.25}$$

其中, $\Delta_{pq}=\{z\in M|\mu(z)\in[a_{p-1},a_p],\nu(z)\in[b_{q-1},b_q]\}$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ (取 $\delta<\varepsilon$), 当 $|\Delta_{pq}|=\max\limits_{1\leqslant p,q\leqslant n}\{(a_p-a_{p-1})+(b_q-b_{q-1})\}<\delta$ 时, 对于 $\forall\xi_p,\eta_q$ 均有

$$\begin{aligned}\|\psi(M)-S_D\|&=\max_{\substack{x,y\in X\\ \|x\|\leqslant1,\ \|y\|\leqslant1}}\left|\sum_{p,q}\int_{\Delta_{pq}}[\varphi(z)-(\xi_p+\mathrm{i}\eta_q)]\mathrm{d}(E(z)x,y)\right|\\ &\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant1,\ \|y\|\leqslant1}\delta\sum_{p,q}\int_{\Delta_{pq}}|\mathrm{d}(E(z)x,y)|\\ &=\sup_{\|x\|\leqslant1,\ \|y\|\leqslant1}\delta\int_M|\mathrm{d}(E(z)x,y)|\\ &\leqslant\delta\sup_{\|x\|\leqslant1,\ \|y\|\leqslant1}\|x\|\cdot\|y\|=\delta<\varepsilon.\end{aligned}$$

定理得证. □

2.2.3 $\varphi(x)$ 是 Borel 可测函数时的算子表示

设 X 是 Hilbert 空间, $(\mathbb{C},\mathcal{B},E)$ 是一个谱族, $E:\mathcal{B}\mapsto P(X)$. 设 $f(z)$ 是有界 Borel 可测函数, $\forall x,y\in X$, 令

$$(\Phi(f)x,y)=\int_{\mathbb{C}}f(z)\mathrm{d}(E(z),y). \tag{2.2.26}$$

引理 2.2.11　由式 (2.2.26) 所定义的 $\Phi(f)$ 满足

(1)

$$\|\Phi(f)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}f(z)\mathrm{d}\|E(z)x\|^2; \tag{2.2.27}$$

(2)

$$\Phi(\overline{f})=\Phi(f)^*; \tag{2.2.28}$$

(3)

$$\Phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\Phi(f)+\beta\Phi(g),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}; \tag{2.2.29}$$

(4)

$$\Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g); \tag{2.2.30}$$

(5)

$$\|\Phi(f)\|=\|f\|; \tag{2.2.31}$$

(6) 若 $T\in B(X)$, 则 $TE(\Delta)=E(\Delta)T$, $\forall\Delta\in\mathcal{B}$ (Borel 集) 必须且仅需对一切有界 Borel 可测函数 f, $T\Phi(f)=\Phi(f)T$, 且 f 可由简单函数 h 逼近.

证明　设 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个分划, $\forall z\in C_i$, 定义 $h(z)=\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 这样定义的 $h(z)$ 是一个简单函数. 构造 $\Phi(h)\in B(X)$,

$$\Phi(h)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE(C_i).$$

由于 $E(C_i)$ 是自伴的, 所以

$$\Phi(h)^*=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}E(C_i)=\Phi(\overline{h}).$$

设 $\{C_1',C_2',\cdots,C_n'\}$ 是 $\mathbb{C}$ 的另一个分划, k 是另一个简单函数, 满足在 C_j' 上, $k(z)=\beta_j$, 则

$$\Phi(h)\Phi(k) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_i\beta_j E(C_i \cap C_j').$$

由于 hk 也是简单函数, 且 $z \in C_i \cap C_j'$ 时, $(hk)(z) = \alpha_i\beta_j$, 所以

$$\Phi(h)\Phi(k) = \Phi(hk).$$

同理, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(\alpha h + \beta k) = \alpha\Phi(h) + \beta\Phi(k).$$

对 $\forall x, y \in X$, 由 $\Phi(h)$ 的定义有

$$(\Phi(h)x, y) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i(E(C_i)x, y) = \int_{\mathbb{C}} h\mathrm{d}(E(z)x, y),$$

而 $\Phi^*(h)\Phi(h) = \Phi(\overline{h})\Phi(h) = \Phi(h\overline{h}) = \Phi(|h|^2)$, 故

$$\|\Phi(h)x\|^2 = (\Phi^*(h)\Phi(h)x, x) = (\Phi(|h|^2)x, x) = \int_{\mathbb{C}} |h|^2\mathrm{d}(E(z)x, x),$$

于是, $\|\Phi(h)x\| \leqslant \|h\| \cdot \|x\|$.

另一方面, 若 $x \in R(E(C_j))$, 则 $\Phi(h) = \alpha_j E(C_j)x = \alpha_j x$, 选取 j, 使得 $|\alpha_j| = \|h\|$, 则

$$\|\Phi(h)x\| = \|h\| \cdot \|x\|,$$

因此, $\|\Phi(h)\| = \|h\|$.

这说明对于简单函数性质 (1)~ 性质 (5) 成立. 对于一般的有界 Borel 可测函数, 通过简单函数列一致逼近即可证明. □

以上结论也可推广到无界 Borel 可测函数 f 的情形.

引理 2.2.12 设 f 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Borel 可测函数, 令

$$D_f = \left\{ x \in X \,\middle|\, \int_{\mathbb{C}} |f|^2\mathrm{d}\,\|E(z)x\|^2 < \infty \right\}, \tag{2.2.32}$$

则 D_f 是 X 中的稠子集. 若 $x, y \in D_f$, 则

$$\int_{\mathbb{C}} |f|\mathrm{d}|(E(z)x, y)| \leqslant \|y\| \left(\int_{\mathbb{C}} |f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \tag{2.2.33}$$

又若 f 是有界的, $\nu = \Phi(f)y$, 则 $\forall x, y \in X$,

$$\mathrm{d}(E(z)x, \nu) = \overline{f}\mathrm{d}(E(z)x, y). \tag{2.2.34}$$

证明　对于 $n=1,2,3,\cdots$, 记 $\Delta_n=\{z\in\mathbb{C}\mid |f(z)|\leqslant n\}$, 若 $x\in R(E(\Delta_n))$, 则 $\forall\Delta\in\mathcal{B}$,

$$E(\Delta)x=E(\Delta)E(\Delta_n)x=E(\Delta\cap\Delta_n)x,$$
$$(E(\Delta)x,x)=(E(\Delta\cap\Delta_n)x,x),$$

因而 $\int_\Delta|f|^2\mathrm{d}(E(z)x,x)=\int_{\Delta\cap\Delta_n}|f|^2\mathrm{d}(E(z)x,x)\leqslant n^2\|x\|^2<\infty$, 即 $R(E(\Delta_n))\subset D_f$. $\forall y\in X$, 由于 $\mathbb{C}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$, 所以, $y=\lim\limits_{n\to\infty}E(\Delta_n)y$, 因此 $y\in\overline{D_f}$, 故, D_f 是 X 中的稠子集.

给定 $x,y\in X$, 设 f 是有界的, 由测度理论的 Radon-Nikodym 定理知, 存在可测函数 μ, $|\mu|=1$, 使得

$$\mu f\mathrm{d}(E(z)x,y)=|f|\mathrm{d}(E(z)x,y),$$

即 $\left|\int_{\mathbb{C}}|f|\mathrm{d}(E(z)x,y)\right|=|(\Phi(\mu f)x,y)|\leqslant\|\Phi(\mu f)x\|\cdot\|y\|$, 由引理 2.2.11 得

$$\|\Phi(\mu f)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|\mu f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2.$$

当 f 为任意的 Borel 可测函数时, $x\in D_f$, $y\in X$, $\chi_{\Delta_n}f$ 是有界的 Borel 可测函数, 其中 χ_{Δ_n} 是 Δ_n 上的特征函数, 则

$$\left|\int_{\Delta_n}|f|\mathrm{d}(E(z)x,y)\right|=\left|\int_{\mathbb{C}}|\chi_{\Delta_n}f|\mathrm{d}(E(z)x,y)\right|\leqslant\|y\|\ \|\Phi(\chi_{\Delta_n}f)x\|$$
$$=\|y\|\left(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\|E(z)\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

当 $n\to\infty$ 时, 式 (2.2.33) 得证.

对于任意的有界可测函数g,

$$\int_{\mathbb{C}}g\mathrm{d}(E(z)x,\nu)=(\Phi(g)x,\nu)=(\Phi(g)x,\Phi(f)y)$$
$$=(\Phi(\overline{f})\Phi(g)x,y)=(\Phi(\overline{f}g)x,y)=\int_{\mathbb{C}}g\overline{f}\mathrm{d}(E(z)x,y),$$

所以, $\mathrm{d}(E(z)x,\nu)=\overline{f}\mathrm{d}(E(z)x,y)$. □

定理 2.2.13　设 X 是 Hilbert 空间, $(\mathbb{C},\mathcal{B},E)$ 为一个谱族, 复数域上的每一个 Borel 可测函数 f, 都对应着一个 X 上的稠定闭算子$\Phi(f)$, $D(\Phi(f))=D_f$, 满足

$$(\Phi(f)x,y)=\int_{\mathbb{C}}f(z)\mathrm{d}(E(z)x,y),\quad\forall x\in D_f,y\in X,\tag{2.2.35}$$

并且

$$\|\Phi(f)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2. \tag{2.2.36}$$

证明 对固定的 $x\in D_f$, 由引理 2.2.11 中式 (2.2.27) 知, 映射

$$y\mapsto\int_{\mathbb{C}}f\mathrm{d}(E(z)x,y)$$

是 X 上的有界共轭线性泛函, 其范数不超过 $\left(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 所以存在唯一的元, 记作 $\Phi(f)x\in X$, 使得

$$(\Phi(f)x,y)=\int_{\mathbb{C}}f\mathrm{d}(E(z)x,y),$$

并且

$$\|\Phi(f)x\|^2\leqslant\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2.$$

显然, $\Phi(f)$ 在 D_f 上是线性的, 而且 $f\mapsto\Phi(f)$ 也是线性的.

记 $f_n=f|_{[-n,n]}$ 是 f 的截断函数, 由于 f_n 是有界的, 所以, $D_{f-f_n}=D_f$. 由控制收敛定理, 对 $\forall x\in D_f$,

$$\|\Phi(f)x-\Phi(f_n)x\|\leqslant\int_{\mathbb{C}}|f-f_n|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2\to 0,\quad n\to\infty.$$

由引理 2.2.11 可知

$$\|\Phi(f_n)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2,$$

令 $n\to\infty$, 则式 (2.2.36) 成立. □

至此, 已经证明了对每一个 Borel 可测函数 f, 都存在稠定线性算子 $\Phi(f)$ 以 D_f 为定义域, 满足式 (2.2.27) 和式 (2.2.29), 而且具有如下性质.

定理 2.2.14 设 Φ 是由定理 2.2.13 所给出的从 $\mathbb{C}$ 中 Borel 可测函数到 X 上稠定线性算子的对应关系, 则对任意的 Borel 可测函数 f,g,

(1) $\Phi(f)\Phi(g)\subset\Phi(fg), D(\Phi(f)\Phi(g))=D_g\cap D_{fg}$;

(2) $\Phi^*(f)=\Phi(\overline{f})$;

(3) $\Phi(f)\Phi^*(f)=\Phi^*(f)\Phi(f)$;

(4) $\Phi(f)\Phi(g)=\Phi(fg)\Leftrightarrow D_{fg}\subset D_g$.

证明 见文献 [212] 第 88 页. □

2.3 正常算子的谱分解

根据 2.2 节中的讨论可知, 对于无穷维 Hilbert 空间 X, 存在谱族, 通过谱族引入谱积分, 建立了连续函数 (或可测函数) 与线性算子之间的对应关系. 当函数为实函数时, 所对应的算子是自伴算子 (或称自共轭算子); 当函数为复值函数时, 所对应的算子是正常算子. 那么, 对于正常算子和自伴算子, 是否在无穷维 Hilbert 空间 X 中也存在相应的谱族, 使得正常算子和自伴算子也可以表示成为谱积分或积分算子? 这就是所谓的谱分解.

2.3.1 有界正常算子的谱分解

设 N 是定义在 Hilbert 空间上的有界正常算子, N 的谱集 $\sigma(N) \subset \mathbb{C}$ 是有界闭集, $\mathcal{B}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的 Borel 集类. 定义 $E: \mathcal{B} \to P(X)$ 如下:

$$E(\Omega) = \tau\chi_{\Omega\cap\sigma(N)}, \quad \forall\Omega \subset \mathcal{B}, \tag{2.3.1}$$

其中, χ_Λ 由式 (2.2.22) 定义, 表示 Borel 集 Λ 上的特征函数, 而 τ 是由式 (2.2.21) 所定义的映射. 显然, 若 $U \cap \sigma(N) = \varnothing$, 则 $E(U) = \theta$, $E(\mathbb{C}) = E(\sigma(N)) = I$.

由 2.2 节的讨论, 我们也可以得到一个谱族 $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$, 而且 $\forall x, y \in X$,

$$(E(\Omega)x, y) = \int_{\Omega\cap\sigma(N)} m_{xy}(\mathrm{d}z) = m_{xy}(\Omega \cap \sigma(N)), \tag{2.3.2}$$

对于 $z \in \mathbb{C}$, 记 $\Omega_z = \{s + \mathrm{i}t \in \sigma(N) \mid s \leqslant \Re z,\ t \leqslant \Im z\}$, 并且令

$$E(z) = E(\Omega_z), \quad m_{x,y}(z) = m_{x,y}(\Omega_z). \tag{2.3.3}$$

则有 $m_{x,y}(z) = (E(z)x, y)$, 故当 $\psi \in BV(\sigma(N))$ 时,

$$(\psi(N)x, y) = \int_{\sigma(N)} \psi(z)m_{x,y}(\mathrm{d}z) = \int_{\sigma(N)} \psi(z)\mathrm{d}m_{x,y}(z), \tag{2.3.4}$$

这样就得到了有界正常算子的谱分解定理 (证明见定理 2.2.10).

定理 2.3.1 设 N 是 Hilbert 空间 X 上的一个有界正常算子, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$ 是由式 (2.3.1) 定义的谱族, 则对于任意的 $\varphi \in BV(\sigma(N))$, 存在唯一的算子 $\varphi(N) \in B(X)$, 使得 $\forall x, y \in X$,

$$(\varphi(N)x, y) = \int_{\sigma(N)} \varphi(z)\mathrm{d}(E(z)x, y), \tag{2.3.5}$$

即在一致收敛意义下

$$\varphi(N) = \int_{\sigma(N)} \varphi(z)\mathrm{d}E(z). \tag{2.3.6}$$

事实上, 可以验证按算子范数在 Lebesgue 积分意义下式 (2.3.6) 右端的积分收敛, 且恰收敛于 $\varphi(N)$.

定理 2.3.2 设 N 是 X 上的有界正常算子, 对于任意的 $\varphi \in BV(\sigma(N))$, 积分 $\int_{\sigma(N)} \varphi(z)\mathrm{d}E(z)$ 在一致意义下收敛, 而且

$$\varphi(N) = \int_{\sigma(N)} \varphi(z)\mathrm{d}E(z), \tag{2.3.7}$$

其中, E 是由式 (2.3.1) 定义的谱族. 特别地, 对 $\forall x \in X$, 有

$$\varphi(N)x = \int_{\sigma(N)} \varphi(z)\mathrm{d}E(z)x. \tag{2.3.8}$$

若取 $\varphi(z) = z$, 则有

$$N = \int_{\sigma(N)} z\mathrm{d}E(z), \quad Nx = \int_{\sigma(N)} z\mathrm{d}E(z)x, \tag{2.3.9}$$

$$(Nx, y) = \int_{\sigma(N)} z\mathrm{d}(E(z)x, y), \quad \forall x, y \in X. \tag{2.3.10}$$

推论 2.3.3 对于任意 $\varphi \in BV(\sigma(N))$ 及 $x \in X$, 有

$$\|\varphi(N)x\|^2 = \int_{\sigma(N)} |\varphi(z)|^2\mathrm{d}\|E(z)x\|^2. \tag{2.3.11}$$

证明 由式 (2.3.4) 得

$$\begin{aligned}\|\varphi(N)x\|^2 &= (\varphi(N)x, \varphi(N)x) = (\varphi(N)^*\varphi(N)x, x) \\ &= \int_{\sigma(N)} |\varphi(z)|^2 m_{x,x}(\mathrm{d}z) = \int_{\sigma(N)} |\varphi(z)|^2\mathrm{d}(E(z)x, x),\end{aligned}$$

而 $m_{x,x}(z) = (E(z)x, x) = \|E(z)x\|^2$. 得证. □

推论 2.3.4 设 A 是有界自伴算子, 则 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 且

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda\mathrm{d}E_\lambda, \tag{2.3.12}$$

其中, $E_\lambda = E\big((-\infty, \lambda] \cap \sigma(A)\big)$, $-\infty < \lambda < \infty$.

易证:

(1) 当 $\lambda \leqslant \lambda'$ 时, $E_\lambda \leqslant E_{\lambda'}$, 即 $E_{\lambda'} - E_\lambda \geqslant 0$;

(2) $E_\lambda = s\text{-}\lim\limits_{\lambda' \to \lambda+0} E_{\lambda'}$;

(3) $E_a = \theta$, $E_b = I$, 其中, $a = \inf \sigma(A)$, $b = \sup \sigma(A)$.

例 2.3.5 设 U 是一个酉算子, 则 $\sigma(U) \subset S^1$(S^1 表示单位球面), 而且

$$U = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}F_\theta, \tag{2.3.13}$$

其中 $F_\theta = E(\sigma(U) \cap \mathrm{e}^{\mathrm{i}[0,\theta)})$.

2.3.2 无界正常算子的谱分解

引理 2.3.6 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的稠定闭算子, 令 $Q = I + T^*T$, $D(Q) = D(T^*T)$, 则

(1) Q 是 $D(Q)$ 到 X 上的 1-1 映射;

(2) 存在 $B \in B(X)$, $C \in B(X)$, 满足 $\|B\| \leqslant 1$, $\|C\| \leqslant 1$, 且 B 是自伴算子, 使得 $C = TB$, 并且

$$BQ \subset QB = I; \tag{2.3.14}$$

(3) 记 $T|_{D(T^*T)} = T'$, 则它的图满足 $\overline{\Gamma(T')} = \Gamma(T)$.

证明 (1) 对于任意 $x \in D(Q)$, $Tx \in D(T^*)$,

$$(x, Qx) = (x, x) + (Tx, Tx), \tag{2.3.15}$$

故 $\|Qx\| \geqslant \|x\|$, Q 是 1-1 的.

(2) 在 $X \times X$ 上定义算子 $V : \langle x, y\rangle \mapsto \langle y, -x\rangle$, 由 $\Gamma(T^*) = (V\Gamma(T))^\perp$ 可知, $X \times X = \Gamma(T^*) \oplus (V\Gamma(T))$. 于是 $\forall h \in X$, 存在唯一的 $b \in D(T)$ 和唯一的 $c \in D(T^*)$, 使得

$$\langle 0, h\rangle = \langle c, T^*c\rangle + \langle -Tb, b\rangle. \tag{2.3.16}$$

定义算子 $B : h \to b$; $C : h \to c$, 显然 B 和 C 是线性算子. 又由于

$$\langle c, T^*c\rangle \perp \langle -Tb, b\rangle,$$

所以,

$$\begin{aligned} &\|\langle 0, h\rangle\|^2 = \|\langle c, T^*c\rangle\|^2 + \|\langle -Tb, b\rangle\|^2 = \|c\|^2 + \|T^*c\|^2 + \|Tb\|^2 + \|b\|^2 \\ \Rightarrow \quad &\|h\|^2 \geqslant \|c\|^2 + \|b\|^2, \end{aligned}$$

故 $\|B\| \leqslant 1$, $\|C\| \leqslant 1$.

又由式 (2.3.16) 可知

$$c - Tb = 0, \quad h = T^*c + b \quad \Rightarrow \begin{cases} c = Tb \quad \Rightarrow \quad Ch = TBh, \\ h = T^*Tb + b = (T^*T + I)b = Qb = QBh. \end{cases}$$

由 h 的任意性得, $C=TB$, $QB=I$. 由此可知, Q 是 $D(Q)$ 到 X 上的映射, B 是 X 到 $D(Q)$ 上的一对一映射.

对 $\forall y\in D(Q)$, 存在唯一的 $h\in X$, 使得 $Bh=y$, 于是

$$BQy=B(QB)h=Bh=y, \tag{2.3.17}$$

从而, $BQ\subset I$.

又 $\forall x\in X$, 存在唯一的 $y\in D(Q)$, 使得 $Qy=x$. 由于 Q 是自伴的, 且 $Q\geqslant 0$, 所以,

$$(Bx,x)=(BQy,Qy)=(y,Qy)\geqslant 0. \tag{2.3.18}$$

同时 $Q^*B^*=(BQ)^*\supset I^*=I$, $QB^*=I$, 而 $QB=I$. 故 $B=B^*$, 从而 B 是正自伴算子.

(3) 由于 T 是闭算子, 所以 $\Gamma(T)$ 是 $X\times X$ 中的闭子空间, 且 $\Gamma(T)$ 本身也是一个 Hilbert 空间. 设 $\langle z,Tz\rangle\in\Gamma(T')^{\perp}$, 则 $\forall x\in D(T^*T)$

$$0=(\langle z,Tz\rangle,\langle x,Tx\rangle)=(z,x)+(Tz,Tx)=(z,Qx), \tag{2.3.19}$$

又 $R(Q)=X$, 从而 z=0, 故 $\overline{\Gamma(T')}=\Gamma(T)$. □

下面将利用有界正常算子的谱分解来导出无界正常算子的谱分解. 设 N 是 X 上的无界正常算子, 构造一列两两可交换的投影算子 $\{P_i\}$, 满足 $\sum P_i=I$ 及 $P_iN\subset NP_i$, 则 NP_i 是有界正常算子. 由 NP_i 的谱族可导出 N 的谱族.

定理 2.3.7 设 N 是 Hilbert 空间 X 上的无界正常算子, 则存在唯一的谱族 $(\mathbb{C},\mathcal{B},E)$ 使得

$$(Nx,y)=\int z\mathrm{d}(E(z)x,y),\quad \forall x\in D(N),\forall y\in X, \tag{2.3.20}$$

$$N=\int z\mathrm{d}E(z). \tag{2.3.21}$$

证明 (1) 构造投影算子 $\{P_i\}$: 对于算子 N, 由引理 2.3.6 知, 存在 $B,C\in B(X)$, 满足 $\|B\|\leqslant 1$, $\|C\|\leqslant 1$, $B\geqslant 0$, $C=NB$, 并且

$$B(I+N^*N)\subset(I+N^*N)B=I. \tag{2.3.22}$$

又因为 $N^*N=NN^*$, 所以,

$$BN=BN(I+N^*N)B=B(I+N^*N)NB\subset NB=C. \tag{2.3.23}$$

于是 $BC=B(NB)=(BN)B\subset CB$. 由于 B,C 有界, 所以 $BC=CB$. B 是有界自伴算子, 对任意有界 NP_i 可测函数 $\varphi(z)$,

$$\varphi(B)C=C\varphi(B), \tag{2.3.24}$$

而 $\|B\| \leqslant 1$, B 是正的自伴算子, 故 $\sigma(B) \subset [0,1]$. 设 E^B 是算子 B 相关联的谱族, 因为 B 是一对一的, 所以 $0 \notin \sigma_P(B)$, $E^B(\{0\}) = 0$, 即 B 的谱集在 $(0,1]$ 上. $E^B(0,1] = I$, 选择 $\{t_i\}(1 = t_0 > t_1 > t_2 > \cdots)$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 0$. 考虑特征函数

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i < t \leqslant t_{i-1}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.3.25}$$

设

$$f_i(t) = \begin{cases} \chi_i(t)/t, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \qquad i = 1,2,3,\cdots,$$

则 $f_i(t)$ 是 $\sigma(B)$ 上的有界变差可测函数.

定义投影算子

$$P_i = \chi_i(B) = E^B(t_i, t_{i-1}), \tag{2.3.26}$$

由于 $\chi_i\chi_j = 0\ (i \neq j)$, 所以 $P_iP_j = P_jP_i\ (i \neq j)$. 而又 $\cup(t_i, t_{i-1}] = (0,1]$, 所以 $\forall x \in X$,

$$\sum_i P_i x = \sum_i \chi_i B x = E^B\big((0,1]\big)x = x. \tag{2.3.27}$$

(2) 构造谱族 $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$: 由于 $\chi_i(t) = tf_i(t)$, 所以,

$$NP_i = N\chi_i(B) = NBf_i(B) = Cf_i(B) \in B(X), \tag{2.3.28}$$

最后一步用到 C 有界, $f_i(B)$ 有界. 而 $P_iN = f_i(B)BN \subset f_i(B)C$, 由式 (2.3.24) 得

$$P_iN \subset f_i(B)C = Cf_i(B) = NP_i. \tag{2.3.29}$$

由于 NP_i 是有界算子, $D(NP_i) = X$, 所以,

$$R(P_i) \subset D(N), \quad i = 1,2,3,\cdots. \tag{2.3.30}$$

若 $P_iy = y$, 则根据式 (2.3.31) 便有 $P_iNy = NP_iy = Ny$, 这说明 $N : R(P_i) \mapsto R(P_i)$, 即 $R(P_i)$ 是 N 的不变集.

下证 NP_i 是有界正常算子:

$$(NP_i)^* \subset (P_iN)^* = N^*P_i, \tag{2.3.31}$$

又 $(NP_i)^*$ 是有界算子, 定义域是全空间, 所以

$$(NP_i)^* = N^*P_i. \tag{2.3.32}$$

对于正常算子 N, $\|Nx\| = \|N^*x\|$, 于是对于任意 $x \in X$,

$$\|NP_ix\| = \|N^*P_ix\| = \|(NP_i)^*x\|. \tag{2.3.33}$$

如果 $\forall x \in D(A), \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2$, 则

$$(x, A^*Ax) = (Ax, Ax) = (A^*x, A^*x) = (x, AA^*x), \tag{2.3.34}$$

从而得 $(x, (A^*A - AA^*)x) = 0$, 即 $A^*A - AA^* = 0$, A 是正常算子. 根据式 (2.3.33) 可得, NP_i 是有界正常算子.

设 E^i 是与 NP_i 相关联的谱族, 而 $R(P_i)$ 是 N 的不变子集, P_i 与 NP_i 可交换, 则对任意 Borel 集 $\Delta \subset \mathbb{C}$, P_i 与 $E^i(\Delta)$ 可交换, 即

$$E^i(\Delta)P_i = P_iE^i(\Delta). \quad i = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.3.35}$$

$\forall x \in X$, 根据式 (2.3.27) 可得

$$\sum_i \|E^i(\Delta)P_ix\|^2 \leqslant \sum_i \|P_ix\|^2 = \|x\|^2, \tag{2.3.36}$$

则 $\sum\limits_i E^i(\Delta)P_ix$ 在空间 X 中收敛, 所以, 对任意 $\Delta \in \mathcal{B}$ 可定义

$$E(\Delta) = \sum_i E^i(\Delta)P_i, \tag{2.3.37}$$

显然 $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$ 是一个谱族.

(3) 根据定理 2.2.13, 可以构造算子 M:

$$D(M) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \int_{\mathbb{C}} |z|^2 \,\mathrm{d}\|E(z)\|^2 < \infty \right\}, \tag{2.3.38}$$

$$(Mx, y) = \int_{\mathbb{C}} z\mathrm{d}(E(z)x, y), \quad \forall x \in D(M),\ y \in X. \tag{2.3.39}$$

由定理 2.2.14 的性质 (3) 知, M 是一个正常算子.

下面证明 $M = N$. 只需证明 $N \subset M$, 则由正常算子是自身的极大扩张便有 $M = N$.

若 $x \in R(P_i)$, 则 $x = P_ix$, 于是 $E(\Delta)x = E^i(\Delta)x$, 且 $\forall y \in X$,

$$(Nx, y) = (NP_ix, y) = \int z\mathrm{d}(E^i(z)x, y) = \int_{\mathbb{C}} z\mathrm{d}(E(z)x, y) = (Mx, y), \tag{2.3.40}$$

所以, 当 $x \in R(P_i)$ 时, $Nx = Mx$.

$\forall x \in D(N)$, 有 $P_ix \in R(P_i)$, 从而

$$P_iNx = NP_ix = MP_ix, \quad i = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.3.41}$$

记 $Q_i = P_1 + P_2 + \cdots + P_i$, 则 $Q_iNx = MQ_ix$, 所以

$$\langle Q_ix, Q_iNx\rangle \in \Gamma(M), \quad i = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.3.42}$$

因为 $\Gamma(M)$ 是闭的, 所以, 当 $i \to \infty$ 时, 可得 $\langle x, Nx\rangle \in \Gamma(M)$, 因此 $\Gamma(N) \subset \Gamma(M)$, 即 $N \subset M$.

(4) 唯一性. 设 $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$ 是使得 $\forall x \in D(N)$, $y \in X$,

$$(Nx, y) = \int_{\mathbb{C}} z\mathrm{d}(E(z)x, y) \tag{2.3.43}$$

都成立的任意的谱族.

由于 N^*N 是正常算子, 所以它有唯一的平方根算子, 记作 $(N^*N)^{\frac{1}{2}}$. 令

$$T = N(I + (N^*N)^{\frac{1}{2}})^{-1}, \tag{2.3.44}$$

则 $\forall x \in D_y$, $y \in X$,

$$(Tx, y) = \int_{\mathbb{C}} g(z)\mathrm{d}(E(z)x, y), \tag{2.3.45}$$

其中 $g(z) = z/(1 + |z|)$. 由于 g 有界, 所以 $D_y = X, T \in B(X)$. 显然 T 是一个有界正常算子. 由于 T 是一对一的, 因此

$$(Tx, y) = \int_{\mathbb{C}} z\mathrm{d}(E(g^{-1}(z)x, y). \tag{2.3.46}$$

记 T 的谱族为 E^T, 则 $T = \displaystyle\int_{\mathbb{C}} z\mathrm{d}E^T(z)$. 因为 T 的谱族唯一, 所以对于任意 Borel 集 Δ, $E^T(\Delta) = E(g^{-1}(\Delta))$. 由此得 N 的谱族是唯一的. □

推论 2.3.8　设 T 是 Hilbert 空间 X 上的无界自伴算子, 则存在唯一的谱族 $\{E_\lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得

$$(Tx, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\mathrm{d}(E_\lambda x, y), \quad \forall x \in D(T), \quad y \in X, \tag{2.3.47}$$

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda\mathrm{d}E_\lambda. \tag{2.3.48}$$

2.4　正常算子的谱

第 1 章已经给出线性算子谱集的定义和分类, 本节重点研究正常算子的谱集. 在本节中恒设 X 是 Hilbert 空间, N 是定义在 X 上的正常算子 (有界或无界).

定理 2.4.1 设 $(\mathbb{C},\mathcal{B},E)$ 是与 N 相关联的谱族, 则

$$\lambda_0 \in \sigma_P(N) \Leftrightarrow E(\{\lambda_0\}) \neq \theta. \tag{2.4.1}$$

证明 必要性. 由于 $\lambda_0 \in \sigma_P(N)$, 所以 $\exists x_0 \in X,\ \ x_0 \neq \theta$, 使得

$$Nx_0 = \lambda_0 x_0.$$

令

$$f_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_0 - z}, & z \notin B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & z \in B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{n}\right), \end{cases} \tag{2.4.2}$$

其中 $B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{n}\right)$ 是以 λ_0 为圆心半径为 $\dfrac{1}{n}$ 的圆盘. 于是 $f_n(z) \in BV(\sigma(N)) \subset B(\mathbb{C})$,

$$f_n(N)(\lambda_0 I - N) = E\left(\mathbb{C}\backslash B\left(\lambda_0, \frac{1}{n}\right)\right),$$

$$f_n(z)(\lambda_0 - z) = \begin{cases} 1, & z \notin B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & z \in B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{n}\right), \end{cases} \tag{2.4.3}$$

因此,

$$\begin{aligned} f_n(N)(\lambda_0 I - N) &= \int_{\mathbb{C}} f_n(z)(\lambda_0 - z)\mathrm{d}E_\lambda \\ &= \int_{\mathbb{C}\backslash B(\lambda_0,1/n)} \mathrm{d}E_\lambda = E(\mathbb{C}\backslash B(\lambda_0, 1/n)), \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

从而, $E\left(\mathbb{C}\backslash B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{n}\right)\right) x_0 = f_n(N)(\lambda_0 I - N)x_0 = 0.$

令 $n \to \infty$, 得到 $E(\mathbb{C}\backslash\{\lambda_0\})x_0 = 0$, 而 $E(\mathbb{C})x_0 = E(\sigma(N))x_0 = x_0$, 故

$$E(\{\lambda_0\})x_0 = x_0.$$

另外也可以得到

$$\begin{aligned} x_0 = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}E_\lambda x_0 &= \int_{\mathbb{C}\backslash B(\lambda_0,1/n)} + \int_{B(\lambda_0,1/n)} \mathrm{d}E_\lambda x_0 \\ &= \int_{B(\lambda_0,1/n)} \mathrm{d}E_\lambda x_0 = E\left(B\left(\lambda_0, \frac{1}{n}\right)\right) x_0, \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 也得到 $E(\{\lambda_0\})x_0 = x_0$.

充分性. 由 $E(\{\lambda_0\})\neq\theta$, 设 $x_0\in E(\{\lambda_0\})X,\ \ x_0\neq\theta$, 则

$$E(\{\lambda_0\})x_0=x_0.$$

而

$$Nx_0=\int_{\sigma(N)}z\mathrm{d}E(z)x_0=\int_{\sigma(N)}z\mathrm{d}E(z)E(\{\lambda_0\})x_0=\lambda_0E^2(\{\lambda_0\})x_0=\lambda_0x_0,$$

故 $\lambda_0\in\sigma_P(N)$. □

定理 2.4.2　设 N 是 X 上的正常算子, 则 $\sigma_r(N)=\varnothing$.

证明　若不然, 设 $\lambda_0\in\sigma_r(N)$, 则 $\overline{R(\lambda_0I-N)}\neq X$, 而 $\mathrm{Ker}(\lambda_0I-N)=\{\theta\}$. 由于 $R(\lambda_0I-N)^{\perp}=N(\overline{\lambda_0}I-N^*)$, 所以 $\overline{\lambda_0}\in\sigma_P(N^*)$.

记 E_{N^*} 为与 N^* 相关联的谱族, 由定理 2.4.1 知

$$E_{N^*}(\{\overline{\lambda_0}\})\neq 0. \tag{2.4.5}$$

设 E_N 为与 N 相关联的谱族, 则

$$N=\int_{\sigma(N)}z\mathrm{d}E_N(z),\quad N^*=\int_{\sigma(N^*)}z\mathrm{d}E_{N^*}(z).$$

又因为 $\lambda\in\sigma(N)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma(N^*)$, 所以,

$$N^*=\int_{\sigma(N)}\overline{z}\mathrm{d}E_N(z)=\int_{\sigma(N^*)}z\mathrm{d}E_{N^*}(\overline{z}).$$

由式 (2.4.3) 和式 (2.4.4) 便得

$$E_N(\{\overline{z}\})=E_{N^*}(\{z\}),$$

从而, $E_N(\{\lambda_0\})=E_{N^*}(\{\overline{\lambda_0}\})$. 根据 (2.4.5) 知 $E_N(\{\lambda_0\})\neq 0$, 再由定理 2.4.1 可得 $\lambda_0\in\sigma_P(N)$, 这与 $\lambda_0\in\sigma_r(N)$ 矛盾, 故 $\sigma_r(N)=\varnothing$. □

定理 2.4.3　设 N 是 X 上的正常算子, $(\mathbb{C},\mathcal{B},E)$ 是与 N 相关联的谱族, 则 $\lambda_0\in\sigma(N)$ 的充分必要条件是对于 λ_0 的任意邻域 U 有

$$E(U)\neq 0. \tag{2.4.6}$$

证明　充分性. 假设对于 λ_0 的任意邻域 U 有 $E(U)\neq 0$, 但是 $\lambda_0\in\rho(N)$, 则必有 λ_0 的某个邻域 U', 使得 $U'\cap\sigma(N)=\varnothing$, 从而 $E(U')=0$, 矛盾, 故 $\lambda_0\in\sigma(N)$.

必要性. 若 $\lambda_0\in\sigma(N)$, 但是 $\exists\lambda_0$ 的邻域 U', 使得 $E(U')=0$, 则根据定理 2.4.2, $\sigma_r(N)=\varnothing$, 所以 $\overline{R(\lambda_0I-N)}=X$, 因此存在 $\{x_n\}\subset X$, 且 $\|x_n\|=1\ (n=1,2,\cdots)$, 满足 $(\lambda_0I-N)x_n\to 0$, 由谱分解定理知

$$\|(\lambda_0 I - N)x_n\|^2 = \int_{\sigma(N)} |\lambda_0 - z|^2 \mathrm{d}\|E(z)x_n\|^2$$

$$= \int_{\sigma(N)\setminus U'} |\lambda_0 - z|^2 \mathrm{d}\|E(z)x_n\|^2 \geqslant \delta^2\|x_n\|^2 = \delta^2,$$

其中 $\delta = \mathrm{dist}(\lambda_0, \partial U')$, 这与 $(\lambda_0 I - N)x_n \to 0$ 矛盾, 故对于 λ_0 的任意邻域 U 都有 $E(U) \neq 0$. □

对于正常算子 N 而言, $\sigma_r(N) = \varnothing$, 则 $\sigma(N) = \sigma_p(N) \cup \sigma_c(N)$. 若按照投影空间的维数重新划分, 则有 $\sigma(N) = \sigma_e(N) \cup \sigma_d(N)$.

定理 2.4.4 设 N 是 Hilbert 空间 X 上的正常算子, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$ 是与 N 相关联的谱族, $\forall \lambda_0 \in \sigma(N)$,

(1) 若存在 λ_0 的某个 Borel 邻域U, 使得 $\dim E(U)X < \infty$, 则 $\lambda_0 \in \sigma_d(N)$, 反之亦然;

(2) 若对 λ_0 的任何 Borel 邻域 U, $\dim E(U)X = \infty$, 则 $\lambda_0 \in \sigma_e(N)$. 反之亦然.

证明 只证 (1). 若 (1) 成立, 则 (2) 显然.

设 $\lambda_0 \in \sigma(N)$, 存在 λ_0 的某个 Borel 邻域 U, 使得 $\dim E(U)X < \infty$. 若 λ_0 不是 $\sigma(N)$ 的孤立点, 则 $\exists \{\lambda_n\} \subset \sigma(N)$, 使得 $\lambda_n \to \lambda_0$, 而 λ_n 互不相同. 不妨设 $\{\lambda_n\} \subset U$, 取 λ_n 的开邻域 U_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 使得 U_n 互不相交, 而且 $U_n \subset U$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 由定理 2.4.3 知, $E(U_n) \neq 0$. 显然, 当 $m \neq n$ 时, $E(U_n)X$ 与 $E(U_m)X$ 正交, 从而

$$\dim E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) X = \infty.$$

与 $\dim E(U)X < \infty$ 矛盾, 所以 λ_0 也是 $\sigma(N)$ 的孤立点. 而且

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - N) = \dim E(\{\lambda_0\})X \leqslant \dim E(U)X < \infty,$$

即 λ_0 是有限维的特征值.

反之, 若 $\lambda_0 \in \sigma_d(N)$, 即 λ_0 是有限重孤立特征值, 则存在 λ_0 的 Borel 邻域 U', 使得 $U' \cap \sigma(N) = \{\lambda_0\}$, $E(U')X = E(\{\lambda_0\})X = \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - N)$, 所以

$$\dim E(U')X = \dim \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - N) < \infty.$$

定理得证. □

推论 2.4.5 设 N 是 Hilbert 空间 X 上的正常算子, 则 $\lambda_0 \in \sigma_e(N)$ 与下列三个条件都等价:

(1) $\lambda_0 \in \sigma_c(N)$;

(2) λ_0 是 $\sigma_p(N)$ 的极限点;

(3) λ_0 是无限重的特征值.

推论 2.4.6　N 是 Hilbert 空间 X 上的线性算子, 则

(1) N 是酉算子 $\Leftrightarrow \sigma(N) \subset S^1$;

(2) N 是自伴算子 $\Leftrightarrow \sigma(N) \subset \mathbb{R}$;

(3) N 是正自伴算子 $\Leftrightarrow \sigma(N) \subset \mathbb{R}_+$.

设 N 是定义在 Hilbert 空间 X 上的有界正常算子, $\sigma(N)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界闭集, $E(\lambda)$ 是正常算子 N 的谱族, 则由预解算子的解析性及 Cauchy 公式可得如下结论.

定理 2.4.7　设 O 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开集, 且 $\sigma(N) \subset O$, O 的边界 ∂O 是 Jordan 曲线. 若 $\varphi(z)$ 在 $\sigma(N)$ 的邻域是解析的, 并且 $\overline{O}$ 在 $\varphi(z)$ 的解析区域内, 则

$$\varphi(N) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial \overline{O}} \varphi(z)(zI - N)^{-1} \mathrm{d}z. \tag{2.4.7}$$

若 C_1 为 $\sigma(N)$ 的一个连通分支, 又设 Jordan 曲线 $\Gamma \subset \rho(N)$, Γ 包围着 C_1, 并且除了 C_1 外 Γ 内部没有其他谱点, 则 $E(\lambda)$ 在集合 C_1 上的投影算子

$$E(C_1) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma} (zI - N)^{-1} \mathrm{d}z. \tag{2.4.8}$$

证明　因 $\varphi(z)$ 在 $\overline{O}$ 上解析, $\sigma(N) \subset \overline{O}$, 故由 Cauchy 公式, $\forall \xi \in \sigma(N)$ 有

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial \overline{O}} \frac{\varphi(z)}{z - \xi} \mathrm{d}z. \tag{2.4.9}$$

设 $(\mathbb{C}, \mathcal{B}, E)$ 是 N 的谱族, 由谱分解定理

$$\varphi(N) = \int_{\sigma(N)} \varphi(\xi) \mathrm{d}E_\xi, \tag{2.4.10}$$

把式 (2.4.9) 代入式 (2.4.10) 得

$$\begin{aligned}
\varphi(N) &= \int_{\sigma(N)} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial \overline{O}} \frac{\varphi(z)}{z - \xi} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}E_\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial \overline{O}} \varphi(z) \left(\int_{\sigma(N)} \frac{1}{z - \xi} \mathrm{d}E_\xi \right) \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

所以

$$\varphi(N) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial \overline{O}} \varphi(z)(zI - N)^{-1} \mathrm{d}z. \tag{2.4.11}$$

即式 (2.4.7) 成立.

由式 (2.4.7) 可直接得到式 (2.4.8). □

2.5 自伴算子的谱分解

2.5.1 对称算子

第 1 章定义了对称算子和自伴算子. 设 X 是 Hilbert 空间, A 是 X 到自身的一个稠定线性算子, 若 A^* 是 A 的扩张, 即 $A \subset A^*$, 则称 A 是对称算子; 若 $A = A^*$, 则称 A 为自伴算子; 若 $\overline{A} = A^*$ 是自伴的, 则称 A 是本质自伴算子. 对一般的算子而言, 当 A 是定义在 X 上的有界算子时, A 是对称算子 $\Leftrightarrow A$ 是自伴算子, 也就是对有界算子而言, 对称和自伴是等价的. 本小节将在第 1 章的基础上给出对称算子和自伴算子一些性质.

设 A 是 Hilbert 空间 X 上的一个对称算子, 则显然有下列等式

$$\|(A \pm \mathrm{i}I)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2. \tag{2.5.1}$$

事实上, 只需计算 $\|(A \pm \mathrm{i}I)x\|^2$ 即可得.

命题 2.5.1 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的一个对称算子, 则 $\mathrm{Ker}(A \pm \mathrm{i}I) = \{\theta\}$.

命题 2.5.2 当 A 是闭对称算子时, 值域 $R(A \pm \mathrm{i}I)$ 必是闭的.

命题 2.5.3 若 A 是对称算子, 则

$$\mathrm{Ker}(A^* \pm \mathrm{i}I) = R(A \mp \mathrm{i}I)^{\perp}. \tag{2.5.2}$$

证明 设 $y \in \mathrm{Ker}(A^* + \mathrm{i}I)$, 则 $y \in D(A^*)$, 而且

$$((A - \mathrm{i}I)x, y) = (x, (A^* + \mathrm{i}I)y) = 0$$

对任意的 $x \in D(A)$ 均成立, 从而 $y \in R(A - \mathrm{i}I)^{\perp}$, 所以

$$\mathrm{Ker}(A^* + \mathrm{i}I) \subset R(A - \mathrm{i}I)^{\perp}.$$

反之, 设 $y \in R(A - \mathrm{i}I)^{\perp}$, 则 $\forall x \in D(A)$ 有

$$((A - \mathrm{i}I)x, y) = 0,$$

从而有 $y \in D(A^*)$, 并且 $(x, (A^* + \mathrm{i}I)y) = 0$.

又因为 $D(A)$ 在 X 稠密, 所以 $(A^* + \mathrm{i}I)y = 0$, 即 $y \in \mathrm{Ker}(A^* + \mathrm{i}I)$, 从而

$$\mathrm{Ker}(A^* + \mathrm{i}I) \supset R(A - \mathrm{i}I)^{\perp},$$

故 $\mathrm{Ker}(A^* + \mathrm{i}I) = R(A - \mathrm{i}I)^{\perp}$. 同理可证 $\mathrm{Ker}(A^* - \mathrm{i}I) = R(A + \mathrm{i}I)^{\perp}$. □

特别地, 若 $\mathrm{Ker}(A^* \pm \mathrm{i}I) = \{\theta\}$, 则 $\overline{R(A \mp \mathrm{i}I)} = X$.

定理 2.5.4　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的一个对称算子, 则以下三个命题等价:

(1) A 是自伴算子;

(2) A 是闭算子且 $\text{Ker}(A^* \pm \text{i}I) = \{\theta\}$;

(3)

$$R(A \mp \text{i}I) = X. \tag{2.5.3}$$

证明　$(1) \overset{(a)}{\Rightarrow} (2) \overset{(b)}{\Rightarrow} (3) \overset{(c)}{\Rightarrow} (1)$.

(a) 若 A 是自伴算子, 则 A 是闭算子, 由命题 2.5.1 知, $\text{Ker}(A^* \pm \text{i}I) = \{\theta\}$.

(b) 设 A 是闭算子且 $\text{Ker}(A^* \pm \text{i}I) = \{\theta\}$, 则由命题 2.5.2 知, $R(A \mp \text{i}I)$ 是闭的, 再由命题 2.5.3 有 $R(A \mp \text{i}I) = \text{Ker}(A^* \pm \text{i}I)^\perp = \{\theta\}^\perp = X$.

(c) 若 $R(A \mp \text{i}I) = X$, 则由命题 2.5.3 知, $\text{Ker}(A^* \pm \text{i}I) = \{\theta\}$. 由于 A 是对称的, 故要证明 A 自伴, 只要证明 $D(A^*) \subset D(A)$ 即可.

设 $y \in D(A^*)$, 由 $R(A \mp \text{i}I) = X$ 得 $\exists z \in D(A)$, 使得

$$(A^* \pm \text{i}I)y = (A \pm \text{i}I)z.$$

又因为 $A \subset A^*$, 所以, $(A^* \mp \text{i}I)(y - z) = 0$, 从而有 $y = z \in D(A)$, 故 A 是自伴算子. □

推论 2.5.5　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的一个对称算子, 则以下三个命题等价:

(1) A 是本质自伴算子;

(2)

$$\text{Ker}(A^* \pm \text{i}I) = \{\theta\}; \tag{2.5.4}$$

(3)

$$\overline{R(A \mp \text{i}I)} = X. \tag{2.5.5}$$

定理 2.5.6　若 A 是自伴算子, 则 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 且

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{|\Im\lambda|}\|x\|. \tag{2.5.6}$$

证明　由于 A 是自伴算子, 所以 $\text{Ker}(A^* \pm \text{i}I) = \{\theta\}$, 且 $R(A \pm \text{i}I) = X$, 故 $\pm\text{i} \in \rho(A)$. 同样若 $\lambda = u + \text{i}v$, $v \neq 0$, 则也有 $\text{Ker}(A + \lambda I) = \{\theta\}$, $\text{Ker}(A + \overline{\lambda} I) = \{\theta\}$, $R(A + \lambda I) = R(A + \overline{\lambda} I) = X$, 这就得到 $\lambda \in \rho(A)$. 所以 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

又对任意的 $\lambda = u + \text{i}v$ $(v \neq 0)$ 及 $\forall x \in D(A)$, 有 $\|(\lambda I - A)x\| = \|(uI - A)x\|^2 + |v|^2\|x\|^2 \geqslant |v|^2\|x\|^2$, 故

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|v|^2}\|x\|^2.$$

□

推论 2.5.7 若 A 是有界自伴算子, 则 $\sigma(A)$ 包含在 $\mathbb{R}$ 内的某一有界闭集内, 即

$$\sigma(A) \subset \big[-\|A\|, \|A\|\big].$$

推论 2.5.8 若 A 是紧自伴算子, 则 $\sigma(A)$ 至多包含实轴上的可列点集.

定理 2.5.9 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(A)$, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, x_1 与 x_2 分别为 λ_1 与 λ_2 对应的特征向量, 即

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2, \tag{2.5.7}$$

则 $(x_1, x_2) = 0$, 即 $N(\lambda_1 I - A) \perp N(\lambda_2 I - A)$.

证明 因 A 是自伴算子, 所以, λ_1, λ_2 都是实数, 而且 $(Ax_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$, 又

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, A^* x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2),$$

上面两式相减得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0,$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故 $(x_1, x_2) = 0$. □

上面结论说明: 对于自伴算子而言, 不同特征值对应的特征向量相互正交. 而且自伴算子特征值的几何重数和代数重数是相等的[46].

2.5.2 自伴算子的谱分解

设 A 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, 由 2.5.1 小节讨论知, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 而且 A 也是正常算子. 由定理 2.3.7 便可得自伴算子的谱分解定理.

定理 2.5.10 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的无界自伴算子, 则存在唯一的谱族 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, E)$, 使得

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}(E(\lambda)x, y), \quad \forall x \in D(A),\ y \in X,$$

即

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E_\lambda, \tag{2.5.8}$$

其中 $\{E_\lambda\}$ 是投影算子族, 满足 $E_\lambda = E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(A))$, 且

(1) 当 $\lambda \leqslant \mu$ 时, $E_\lambda \leqslant E_\mu$;

(2) $\lim\limits_{\lambda \to \mu+0} E_\lambda = E_\mu$;

(3) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda=\theta,\quad \lim\limits_{\lambda\to+\infty} E_\lambda=I.$

同理由定理 2.3.2 及推论 2.3.4 可以得到有界自伴算子的谱分解定理.

定理 2.5.11　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的有界自伴算子, 对 $\sigma(A)$ 上的任意可测函数 $\varphi(x)$ 都有

$$\varphi(A)x=\int_{\sigma(A)}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda x,\quad \forall x\in X.\tag{2.5.9}$$

积分

$$\varphi(A)=\int_{\sigma(A)}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\tag{2.5.10}$$

在一致意义下收敛.

特别地, 当 $\varphi(x)=x$ 时,

$$A=\int_{\sigma(A)}\lambda\mathrm{d}E_\lambda,\tag{2.5.11}$$

其中, $\{E_\lambda\}$ 是投影算子, $E_\lambda=E((-\infty,\lambda]\cap\sigma(A))$, 满足

(1) 当 $\lambda\leqslant\mu$ 时, $E_\lambda\leqslant E_\mu$;

(2) $E_{\lambda+0}=E_\lambda$;

(3) $\lim\limits_{\lambda\to a}E_\lambda=E_a=0,\quad \lim\limits_{\lambda\to b}E_\lambda=E_b=I$, 且当 $\lambda<a$ 时, $E_\lambda=0$; 当 $\lambda>b$ 时, $E_\lambda=I$, 这里, $a=\inf\sigma(A),\quad b=\sup\sigma(A)$.

推论 2.5.12　当 $\varphi(x)$ 是 $\sigma(A)$ 上的有界可测函数时, $\forall x\in X$,

$$\|\varphi(A)x\|^2=\int_{\sigma(A)}|\varphi(\lambda)|^2\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2\tag{2.5.12}$$

当 A 是紧自伴算子时, 根据推论 2.5.8 可知, $\sigma(A)$ 至多有可列个非零实特征值, 且只可能以 0 点为聚点, 即 $\sigma_p(A)=\{\lambda_i\}\subset\mathbb{R}$ 至多可列. 用 $N(\lambda_iI-A)$ 表示 A 对应于 λ_i 的特征向量全体, P_i 表示 $N(\lambda_iI-A)$ 上的投影算子.

引理 2.5.13　若 A 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子, 则必有 $x_0\in X$, $\|x_0\|=1$, 使得

$$|(Ax_0,x_0)|=\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|,\tag{2.5.13}$$

并且满足 $Ax_0=\lambda x_0$, 其中, $\lambda=|(Ax_0,x_0)|$.

定理 2.5.14　如果 A 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子, $\sigma_p(A)=\{\lambda_i\}$, 则 $\{\lambda_i\}$ 对应一组规范正交的特征向量组 $\{e_i\}$, 构成空间 X 上的一组规范正交基, 使得 $\forall x\in X$,

$$x=\sum_i(x,e_i)e_i,\tag{2.5.14}$$

$$Ax=\sum_i\lambda_i(x,e_i)e_i.\tag{2.5.15}$$

证明 $\forall\lambda\in\sigma_p(A)\backslash\{0\}$, 设 $N(\lambda I-A)$ 的正交规范基为 $\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)}$, 其中 $m(\lambda)=\dim N(\lambda I-A)<\infty$ 是特征值 λ 的几何重数. 若 $0\in\sigma_p(A)$, 则设 $N(A)$ 的正交规范基为 $\{e_i^{(0)}\}$. 令

$$\{e_i\}=\begin{cases}\bigcup\limits_{\lambda\in\sigma_p(A)\backslash\{0\}}\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)}\cup\{e_i^{(0)}\}, & 0\in\sigma_p(A),\\ \bigcup\limits_{\lambda\in\sigma_p(A)}\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)}, & 0\notin\sigma_p(A).\end{cases}$$

设 $M=\mathrm{span}\{e_i\}$, 则显然在 M 上式 (2.5.14) 和式 (2.5.15) 成立.

下证 $\overline{M}=X$. 用反证法, 倘若不然, 则 $M^\perp\neq\{\theta\}$. 令 $A^0=A|_{M^\perp}$, 则 A^0 不能有特征值, 从而 $A^0\neq 0$, 而 A^0 是紧算子, 故 $\sigma(A^0)=\{0\}$. 由引理 2.5.13 得

$$\|A^0\|=\sup_{\substack{x\in M^\perp\\ \|x\|=1}}|(A^0x,x)|=0,$$

即 $A^0\equiv 0$, 矛盾. 从而 $\{e_i\}$ 构成 X 上的规范正交基. □

定理 2.5.15 若 A 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子, 则对 $\mathbb{R}$ 上任何的可测函数 $\varphi(x)$ 都有

$$\varphi(A)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda. \tag{2.5.16}$$

特别地, 当 $\varphi(x)=x$ 时,

$$A=\int_{\mathbb{R}}\lambda\mathrm{d}E_\lambda, \tag{2.5.17}$$

其中 $E_\lambda=\sum\limits_{\lambda_i^{-1}\leqslant\lambda}P_i$. 显然 $\{E_\lambda\}$ 是一个谱族, 当 λ_i 是重特征值时, 按重数计算, P_i 是 λ_i 所对应特征子空间的投影算子, 即 $P_iX=N_{\lambda_i}$, 且 $\forall x\in X$, $Ax=\int_{\mathbb{R}}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$, 即

$$x=\sum_i P_ix, \tag{2.5.18}$$

$$Ax=\sum_i\lambda_i(x,e_i)e_i. \tag{2.5.19}$$

2.5.3 自伴算子的谱

设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, 则 A 也是正常算子. 因此关于正常算子谱的结论, 对自伴算子 A 也正确. 而且 A 的谱包含在整个实轴上, 故 A 的谱族 $(\mathbb{R},\mathcal{B},E)$ 也定义在实轴上 (同定理 2.5.11).

定理 2.5.16 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, 则 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明 证法一: 若 A 是自伴算子, 则 A 也是正常算子, 而正常算子的剩余谱是空集, 所以 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证法二: 若 $\sigma_r(A)\neq\varnothing$, 则 $\exists\lambda_0\in\sigma_r(A)\subset\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, 即 $\overline{R(\lambda_0 I-A)}\neq X$. 又由于 $\overline{\lambda_0}=\lambda_0$, 所以 $\mathrm{Ker}(\overline{\lambda_0}I-A^*)=R(\lambda_0 I-A)^{\perp}$, 因此 $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I-A^*)\neq\{\theta\}$, 即 $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I-A)\neq\{\theta\}$, 从而 $\lambda_0\in\sigma_p(A)$, 矛盾. □

根据 2.4 节的定理 2.4.1, 定理 2.4.3 和定理 2.4.4 可得如下定理.

定理 2.5.17 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, $\{E_\lambda\}$ 是它的谱族, 则

(1) $\lambda_0\in\sigma(A)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ E(I_\varepsilon)\neq\theta$, 其中, $I_\varepsilon=(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$;

(2) 当 $\lambda_0\in\sigma(A)$ 时,

(a) $\lambda_0\in\sigma_p(A)\Leftrightarrow\lim\limits_{\varepsilon\to0}E(I_\varepsilon)\neq\theta\Leftrightarrow E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}\neq0$,

(b) $\lambda_0\in\sigma_c(A)\Leftrightarrow\lim\limits_{\varepsilon\to0}E(I_\varepsilon)=\theta$;

(3) $\lambda_0\in\sigma_e(A)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, 有 $\dim R(E(I_\varepsilon))=\infty$.

定义 2.5.18 若 $\{u_j\}\subset D(A)$, $\|u_j\|=1(j=1,2,\cdots)$ 满足

$$w\text{-}\lim_{j\to\infty}u_j=0, \tag{2.5.20}$$

$$\lim_{j\to\infty}(Au_j-\lambda u_j)=0, \tag{2.5.21}$$

则称 $\{u_j\}$ 为算子 A 对应于 λ 的 Weyl 序列 (Weyl sequence) .

若 $\{u_j\}\subset D(A)$, $\|u_j\|=1$, $(j=1,2,\cdots)$, 则 $\{u_j\}$ 弱收敛与 $\{u_j\}$ 是非预紧集等价.

定理 2.5.19 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, 则实数 $\lambda\in\sigma_e(A)\Leftrightarrow\exists A$ 的对应于 λ 的 Weyl 序列.

证明 必要性. 若 $\lambda\in\sigma_e(A)$, 则 λ 或者是无穷维特征值, 或者 $\lambda\in\sigma_c(A)$.

(1) 当 λ 是无穷维特征值时, 取特征子空间 N_λ 的一组规范正交基

$$\{u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots\}\subset N_\lambda,\quad \|u_j\|=1,\quad j=1,2,\cdots,$$

则

$$\lim_{j\to\infty}(A-\lambda I)u_j=0.$$

由于 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots\}$ 是 $N_\lambda\subset D(A)$ 的一组规范正交基, 可以补充成为 X 的规范正交基. 对于任意的 $x\in X$, 有 $\|x\|^2\geqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}|(x,u_j)|^2$, 所以,

$$\lim_{j\to\infty}(x,u_j)=0,$$

从而说明 $w\text{-}\lim\limits_{j\to\infty}u_j=0$.

(2) 当 $\lambda\in\sigma_c(A)$ 时, $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在但无界. 故 $\forall j$, $\exists y_j\in R(A-\lambda I)$, 使得

$$\|(A-\lambda I)^{-1}y_j\|\geqslant j\|y_j\|,\quad (y_i,y_j)=\delta_{i,j}.$$

令 $\tilde{u}_j=(A-\lambda I)^{-1}y_j$, $u_j=\tilde{u}_j/\|\tilde{u}_j\|$, 则 $\|u_j\|=1$, 且 $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 是非预紧集, 从而

$$\|(A-\lambda I)u_j\|=\frac{\|(A-\lambda I)\tilde{u}_j\|}{\|(A-\lambda I)^{-1}y_j\|}=\frac{\|y_j\|}{\|(A-\lambda I)^{-1}y_j\|}\leqslant\frac{1}{j},$$

于是 $\lim\limits_{j\to\infty}(A-\lambda I)u_j=0$.

结合 (1) 和 (2) 必要性得证.

充分性. 若存在 A 的对应于 λ 的 Weyl 序列 $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$, 则 $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 是非预紧的, 并且 $\lim\limits_{j\to\infty}(Au_j-\lambda u_j)=0$.

由 $\lim\limits_{j\to\infty}(Au_j-\lambda u_j)=0$ 可知 $\lambda\notin\rho(A)$, 故 $\lambda\in\sigma(A)$. 若 $\lambda\notin\sigma_e(A)$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得自伴算子 A 在 $(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ 内只有有限多个有限维特征值, 不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\sigma_d(A)$, 对应的规范正交特征向量记为 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$, 其中 $m\geqslant n$. 于是

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda I)u_j\|^2&=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\lambda)^2\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)\\
&=\int_{-\infty}^{\lambda-\varepsilon}(\xi-\lambda)^2\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)+\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}(\xi-\lambda)^2\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)\\
&\quad+\int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty}(\xi-\lambda)^2\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)\\
&\geqslant\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\lambda-\varepsilon}\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)+\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}(\xi-\lambda)^2\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)+\varepsilon^2\int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty}\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)\\
&=\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)+\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}[(\xi-\lambda)^2-\varepsilon^2]\mathrm{d}(E_\xi u_j,u_j)\\
&=\varepsilon^2\|u_j\|^2+\sum_{i=1}^{m}[(\lambda_i-\lambda)^2-\varepsilon^2]\,|(u_j,\varphi_i)|^2,
\end{aligned}$$

令 $j\to\infty$, 根据式 (2.5.20) 和式 (2.5.21) 得 $\varepsilon\leqslant 0$, 这与 $\varepsilon>0$ 矛盾. 所以 $\lambda\in\sigma_e(A)$.

□

定义 2.5.20 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的线性算子, 若 $\sigma_r(A)=\varnothing$, $\sigma_e(A)=\varnothing$, 并且 $\sigma(A)=\sigma_p(A)$ 中的任何点列没有有限聚点, 则称线性算子 A 的谱是离散的.

对于无界正常算子 (无界自伴算子和无界 J-自伴算子)A 而言, $\sigma_r(A)=\varnothing$, 则 $\sigma(A)=\sigma_e(A)\cup\sigma_d(A)$. 若 $\sigma_e(A)=\varnothing$, 则 $\sigma(A)=\sigma_d(A)$, 也就是 A 的谱只包含有限重特征值, 所以, 在此前提条件下无界正常算子 A 的谱是离散的.

定义 2.5.21　设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, 若存在常数 c, 使得

$$(Au,u)\geqslant c\|u\|^2,\quad \forall u\in D(A), \tag{2.5.22}$$

则称算子 A 是下半有界的; 若存在常数 C, 使得

$$(Au,u)\leqslant C\|u\|^2,\quad \forall u\in D(A), \tag{2.5.23}$$

则称算子 A 是上半有界的; 上半有界和下半有界算子统称为半有界算子.

对于下半有界自伴算子 A, 若存在常数 $\gamma>0$, 使得 $\gamma+c=c'>0$, 则

$$((A+\gamma I)u,u)\geqslant c'\|u\|^2>0,\quad \forall u\in D(A), \tag{2.5.24}$$

分别称

$$[u,v]_A=((A+\gamma I)u,v),\quad \|u\|_A=[u,u]^{\frac{1}{2}}\quad (u,v\in D(A)) \tag{2.5.25}$$

为算子 A 在 $D(A)$ 上的能量内积和能量范数(energy product, energy normal).

若 $D(A)$ 在 $\|\cdot\|_A$ 下是完备的, 则 $(D(A),[\cdot\,,\,\cdot]_A)$ 生成一个 Hilbert 空间, 记作

$$H_A=(D(A),\|\cdot\|_A),$$

称 H_A 为算子 A 的能量空间(energy space).

定理 2.5.22　下半有界的自伴算子 A 的谱是离散的当且仅当能量空间 H_A 中的每个有界集在 X 中是预紧的.

证明　充分性. 不妨设 A 是正算子, 即 $\forall u\in D(A)$, $(Au,u)>0$, 则 A^{-1} 存在. 令 $B=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{1/2}\mathrm{d}E_\lambda$, 其中 E_λ 是 A 的谱族, 则 $BB=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda=A$, $B^{-1}B^{-1}=A^{-1}$. 设 $\{u_j\}$ 是 H_A 中的有界集, $\|u_j\|_A\leqslant C\ \ (j=1,2,\cdots)$, 则 $\{u_j\}$ 在 X 中预紧.

由 $\|\cdot\|_A$ 范数定义知

$$\|u_j\|_A^2=(Au_j,u_j)=(Bu_j,Bu_j).$$

令 $v_j=Bu_j$, 则有 $u_j=B^{-1}v_j$. 而对任意的 $j=1,2,\cdots$,

$$\|u_j\|_A\leqslant C\Leftrightarrow\|Bu_j\|=\|v_j\|\leqslant C,$$

也就是 B^{-1} 将有界集 $\{v_j\}$ 映成预紧集 $\{u_j\}=\{B^{-1}v_j\}$, 所以 B^{-1} 是一个紧算子, 因而 $B^{-1}B^{-1}=A^{-1}$ 也是一个紧算子, 故 A 的谱也是离散的.

必要性. 不妨设 $(Au,u)>0$, 则 A^{-1} 存在. 而 A 是自伴算子, 故 A 的谱是离散的当且仅当 A^{-1} 是紧算子. 所以 $B^{-1}=A^{-\frac{1}{2}}$ 也是紧算子, 从而, H_A 中的有界紧集在 X 中是预紧的. □

2.5.4 紧自伴算子

当 A 是 Hilbert 空间 X 上的有界自伴算子时, $\sigma(A)$ 包含在 $\mathbb{R}$ 内的一个有界闭集 $[a,b]$ 内, 其中 $a=\inf\sigma(A)\geqslant -\|A\|$, $b=\sup\sigma(A)\leqslant\|A\|$. A 的谱族 $\{E_\lambda\}$ 可以表示为

$$E_\lambda=E((-\infty,\lambda]\cap\sigma(A)), \tag{2.5.26}$$

即有当 $\lambda\leqslant a$ 时,$E_\lambda=0$; 当 $\lambda\geqslant b$ 时 $E_\lambda=I$.

当 A 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子时, $\sigma(A)$ 由包含在 $\mathbb{R}$ 内的至多可列个特征值组成, 且只可能以 0 为聚点. A 为无穷维空间 X 上的紧自伴算子时, $\sigma(A)$ 只有以下三种可能性:

(1) $\sigma(A)=\{0\}$;

(2) $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$;

(3) $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$, 且 $\lambda_n\to 0\ (n\to\infty)$.

定理 2.5.23 Hilbert 空间中紧自伴算子 A 的不等于零的谱点只能是它的特征值, 它们都是有限重的并且仅以 $\lambda=0$ 为聚点; 反之, 具有这些性质的自伴算子必是紧算子.

证明 设 $\{E_\lambda\}$ 是紧自伴算子 A 的谱族, Δ 表示区间 $(-\infty,-\varepsilon)$, (ε,∞) $(\varepsilon>0)$ 之一, 而 M_Δ 是投影算子 $E(\Delta)$ 所确定的闭子空间, 这个子空间是算子 A 的不变子空间. 设 A_Δ 是算子 A 在 M_Δ 上的部分, 即

$$A_\Delta=AE(\Delta)=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\lambda\mathrm{d}E_\lambda\quad\left(\text{或}\int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda\right).$$

显然, A_Δ 也是紧算子; 另一方面, 它有有界的逆算子, 单位算子

$$I=A_\Delta A_\Delta^{-1}$$

在 M_Δ 上是紧的. 由此可知, M_Δ 是有限维的, 而非零特征值对应的特征子空间包含在 M_Δ 中, 所以, 任何非零特征值对应的特征子空间是有限维的, 即非零特征值是有限重的.

反之, 若算子 A 的谱有本定理所述的特性, 那么 M_Δ 中的每一个子空间都是有限维的, 并且对于 $\varepsilon>0$, 算子

$$A_\varepsilon=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\lambda\mathrm{d}E_\lambda+\int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$$

是紧的 (因为它的值域是有限维的, 所以是有限秩算子). 由于当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\|A - A_\varepsilon\| \to 0$, 故算子 A 也是紧算子. □

当 A 是紧自伴算子时, A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 均为实轴上的点. 可以按绝对值大小编号, 并且特征值的重数是 n, 就把这个特征值连续编上 n 个号, 即排成

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}| \geqslant \cdots,$$

根据定理 2.5.14 得

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, e_i \otimes e_i,$$

其中

$$(e_i \otimes e_i)x = (x, e_i)e_i.$$

更确切地有

$$\left\| A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i \otimes e_i \right\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \to 0, \quad n \to \infty.$$

事实上, $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} \left\| Ax - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) e_i \right\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i \right\| \\ &= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \, |(x, e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |\lambda_{n+1}| \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |\lambda_{n+1}| \, \|x\|. \end{aligned}$$

特别地, 可按正负值把特征值排列起来, 记作

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0, \tag{2.5.27}$$

$$\lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots \leqslant 0. \tag{2.5.28}$$

定理 2.5.24 (极小极大刻画)　设 A 是紧自伴算子, 对应有特征值 (2.5.27) 和特征值 (2.5.28), 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq \theta}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \tag{2.5.29}$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq \theta}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{2.5.30}$$

证明 只需证式 (2.5.29), 用 $-A$ 代替 A 即可证明式 (2.5.30).

设 $\{e_j^+\}\cup\{e_j^-\}$ 是对应算子 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$ 的规范正交系. 若

$$x=\sum_j a_j^+e_j^+ + \sum_j a_j^-e_j^-, \tag{2.5.31}$$

则

$$\frac{(Ax,x)}{(x,x)}=\frac{\sum\lambda_j^+|a_j^+|^2+\sum\lambda_j^-|a_j^-|^2}{\sum|a_j^+|^2+\sum|a_j^-|^2}. \tag{2.5.32}$$

设

$$\mu_n=\inf_{E_{n-1}}\sup_{\substack{x\in E_{n-1}^{\perp}\\ x\neq\theta}}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}. \tag{2.5.33}$$

(1) $\forall E_{n-1}$, 在 $\mathrm{span}\{e_1^+,e_2^+,\cdots,e_n^+\}$ 中总有向量 $x_n\neq\theta$, 使得 $x_n\perp E_{n-1}$, 于是

$$\sup_{\substack{x\perp E_{n-1}\\ x\neq\theta}}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}\geqslant\frac{(Ax_n,x_n)}{(x_n,x_n)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j^+|a_j^+|^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j^+|^2}\geqslant\lambda_n^+, \tag{2.5.34}$$

即得 $\lambda_n^+\leqslant\mu_n$.

(2) 取 $E_{n-1}=\mathrm{span}\{e_1^+,e_2^+,\cdots,e_{n-1}^+\}$, 则

$$\lambda_n^+=\sup_{\substack{x\perp E_{n-1}\\ x\neq 0}}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \tag{2.5.35}$$

从而得 $\lambda_n^+\geqslant\mu_n$.

综合 (1), (2) 便得 $\lambda_n^+=\mu_n$, 式 (2.5.29) 得证. □

推论 2.5.25 若两个紧自伴算子 A,B, 满足 $A\leqslant B$, 则

$$(Ax,x)\leqslant(Bx,x),\quad\forall x\in X, \tag{2.5.36}$$

且 $\lambda_j^+(A)\leqslant\lambda_j^+(B),\ j=1,2,\cdots$.

第 3 章　对称算子的自伴扩张及其谱

3.1　对称算子的扩张

3.1.1　问题的提出

设 X 是 Hilbert 空间, A 和 B 是定义在 X 的某线性流形上的线性算子, 若 A 和 B 均为对称算子, 并且 B 是 A 的扩张, 即 $A \subset B, A \subset A^*$, $B \subset B^*$, 则 $B^* \subset A^*$, 所以

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*. \tag{3.1.1}$$

由式 (3.1.1) 可以看出, 算子 B 是 A 的扩张, 也是 A^* 的收缩, 是否可以描述出 A 的一切对称扩张算子, 这是对称算子理论的基本问题.

若 A 不存在对称扩张, 称算子 A 是极大算子. 任何自伴算子 A 都是极大算子, 这是因为 $A = A^*$.

对于一个一般的对称算子, 自然而然产生如下两个问题: ①A 是对称算子, 是否有对称扩张? 若存在, 如何描述? ② A 是对称算子, 若可以扩张, 是否可以扩张成某一个自伴算子? 若可以, 如何描述?

3.1.2　对称算子的亏子空间和亏指数

设 A 是 Hilbert 空间 X 上的稠定对称算子, 用 $R_{\overline{\lambda}}$ 与 R_λ 分别表示 $A-\overline{\lambda}I$ 和 $A-\lambda I$ 的值域, 则

$$R_{\overline{\lambda}} = R(A-\overline{\lambda}I), \quad R_\lambda = R(A-\lambda I) \tag{3.1.2}$$

是 X 的两个子空间, 但不一定是闭的.

用 $N_{\overline{\lambda}}$ 与 N_λ 分别表示算子 A^* 对应于特征值 $\overline{\lambda}$ 与 λ 的特征子空间, 即

$$N_{\overline{\lambda}} = \mathrm{Ker}\{A^* - \overline{\lambda}I\}, \quad N_\lambda = \mathrm{Ker}\{A^* - \lambda I\}. \tag{3.1.3}$$

命题 3.1.1

$$R_{\overline{\lambda}}^{\perp} = N_\lambda, \quad R_\lambda^{\perp} = N_{\overline{\lambda}}. \tag{3.1.4}$$

证明　只证一个等式, 另一个等式用同样的办法可以证明.

(1) 对任意的 $x \in N_\lambda$, 任意的 $y \in D(A)$,

$$(x,(A-\bar{\lambda}I)y)=((A^*-\lambda I)x,y)=(0,y)=0,$$

由此可推知, $x\perp R_{\bar{\lambda}}$, 即 $x\in R_{\bar{\lambda}}^{\perp}$.

(2) 若 $x\in R_{\bar{\lambda}}^{\perp}$, 则对任意的 $y\in D(A)$,

$$0=(x,(A-\bar{\lambda}I)y)=((A^*-\lambda I)x,y),$$

由于 $D(A)$ 在 X 内稠密, 则 $(A^*-\lambda I)x=0$, 故 $x\in N_{\lambda}$.

由 (1), (2) 便得, $R_{\bar{\lambda}}^{\perp}=N_{\lambda}$. □

定理 3.1.2 设 A 是 X 上的一个闭稠定对称算子, 则对于任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 当 $\Im\lambda\neq 0$ 时, $N_{\bar{\lambda}}=\mathrm{Ker}\{A^*-\bar{\lambda}I\}$ 与 $N_{\lambda}=\mathrm{Ker}\{A^*-\lambda I\}$ 的维数在局部是常数.

证明 设 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\Im\lambda\neq 0$, 只需证明当 $\lambda'\in\mathbb{C}$, λ' 适当小时,

$$\dim N_{\lambda}=\dim N_{(\lambda+\lambda')}$$

即可, 也就是证明 N_{λ} 的维数局部是常数.

设 $\lambda=a+b\mathrm{i}$, $b\neq 0$, 由于 A 是对称算子, 对于任意的 $u\in D(A)$,

$$\|(A-\lambda I)u\|^2\geqslant b^2\|u\|^2.$$

任取 $x\in N_{(\lambda+\lambda')}, \|x\|=1$, 若 $x\in N_{\lambda}^{\perp}=R_{\bar{\lambda}}$, 则存在 $u\in D(A)$, $(A-\bar{\lambda}I)u=x$, 从而

$$\|x\|=\|(A-\bar{\lambda}I)u\|\geqslant|b|\,\|u\|. \tag{3.1.5}$$

另外,

$$0=((A^*-(\lambda+\lambda')I)\,x,u)=\big(x,(A-\bar{\lambda}I)u\big)-\lambda'(x,u)=\|x\|^2-\lambda'(x,u).$$

由上式可知 $\|x\|^2=\lambda'(x,u)$, 即 $\|x\|\leqslant|\lambda'|\,\|u\|$. 于是当 $|\lambda'|<|b|$ 时, 与式 (3.1.5) 矛盾. 这就证明了 $N_{(\lambda+\lambda')}$ 中不存在这样的 x, 使得 $x\in N_{\lambda}^{\perp}$. 所以当 $|\lambda'|<|b|$ 时, 有

$$\dim N_{(\lambda+\lambda')}\leqslant\dim N_{\lambda}. \tag{3.1.6}$$

运用同样的方法可以证明当 $|\lambda'|<\dfrac{|b|}{2}$ 时, 有

$$\dim N_{\lambda}\leqslant\dim N_{\lambda+\lambda'}. \tag{3.1.7}$$

所以, 当 $|\lambda'|<\dfrac{|b|}{2}$ 时, 有 $\dim N_{\lambda}=\dim N_{(\lambda+\lambda')}$. □

由此定理可以推出如下结论：当 $\Im\lambda>0$ 时, 设 $n_{\lambda}=\dim N_{\lambda}$, $n_{\bar{\lambda}}=\dim N_{\bar{\lambda}}$, $n_+=\dim N_{\mathrm{i}}$, $n_-=\dim N_{-\mathrm{i}}$, 则有 $n_{\lambda}=n_+$, $n_{\bar{\lambda}}=n_-$. 也就是说, 算子 A^* 的特征子空间 N_{λ} 和 $N_{\bar{\lambda}}$ 的维数与上半平面 λ 的选取无关.

设 A 是 X 上的一个闭稠定对称算子, 当 $\Im\lambda>0$ 时, 称 N_{λ} 和 $N_{\bar{\lambda}}$ 为算子 A 的亏子空间, 称数对 (n_+,n_-) 为对称算子 A 的亏指数 (deficiency indices), 记作 $\mathrm{def}(A)=(n_+,n_-)$.

注 $n_{\pm}\geqslant 0$, $n_{\pm}$ 也可取 ∞.

3.1.3 Cayley 变换

为了研究对称算子的扩张问题, 引入 Cayley 变换.

定义 3.1.3 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的稠定对称算子, λ 是虚部不为零的任意复数, 算子

$$V=(A-\lambda I)(A-\overline{\lambda}I)^{-1} \tag{3.1.8}$$

称为算子 A 的 Cayley 变换 (Cayley transform).

这个定义是有意义的, 因为 $\Im\lambda\neq 0$, 所以 $\lambda\notin\sigma_p(A)$, 则 $(A-\overline{\lambda}I)^{-1}$ 存在, 因此 V 是有意义的, 而且是定义在 $R_{\overline{\lambda}}\subset X$ 上的线性算子.

定理 3.1.4 (1) Hilbert 空间 X 上稠定对称算子 A 的 Cayley 变换是定义域为 $R_{\overline{\lambda}}$, 值域为 R_λ 的等距算子, $V: y\in R_{\overline{\lambda}}\mapsto x\in R_\lambda$;

(2) 集合 $\{Vy-y\mid y\in D(V)\}$ 在 X 内稠密;

(3) 满足条件 (2) 的任何等距算子 V 都是 Hilbert 空间 X 上某个稠定对称算子的 Cayley 变换.

证明 (1) 由 V 的定义可知, 任意 $y\in D(V)$, 都有 $y\in R_{\overline{\lambda}}$; 反之, 若 $y\in R_{\overline{\lambda}}$, 则 $(A-\overline{\lambda}I)^{-1}y\in D(A)$, 从而, $(A-\lambda I)(A-\overline{\lambda}I)^{-1}y\in R_\lambda$ 有意义, 所以 $y\in D(V)$, 由此得 $D(V)=R_{\overline{\lambda}}$. 设 $x\in D(A)$, 令 $y=(A-\overline{\lambda}I)x$, 则 $y\in D(V)$, 且

$$Vy=(A-\lambda I)x. \tag{3.1.9}$$

从而算子 V 的值域 R_V 与 R_λ 重合.

下证 V 是等距算子. 对上述 y,

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2&=\|(A-\lambda I)x\|^2=((A-\lambda I)x,(A-\lambda I)x)\\&=(Ax,Ax)-\overline{\lambda}(Ax,x)-\lambda(x,Ax)+|\lambda|^2(x,x),\\\|y\|^2&=\left\|(A-\overline{\lambda}I)x\right\|^2=\left((A-\overline{\lambda}I)x,(A-\overline{\lambda}I)x\right)\\&=(Ax,Ax)-\overline{\lambda}(x,Ax)-\lambda(Ax,x)+|\lambda|^2(x,x).\end{aligned}$$

由于 A 是对称算子 $(x,Ax)=(Ax,x)$, 所以 $\|Vy\|^2=\|y\|^2$, 即 V 是等距算子.

(2) 由 y 的定义及式 (3.1.9) 得

$$y-Vy=(\lambda-\overline{\lambda})x=2\Im\lambda\mathrm{i}x.$$

由此可得 $R_{I-V}=\{(I-V)y\mid y\in D(V)\}$ 与 $D(A)$ 重合. 再由 $D(A)$ 在 X 中的稠密性, 得到 R_{I-V} 在 X 中稠密.

(3) 设 V 是满足条件 (2) 的等距算子, 那么 1 不是这个算子的特征值. 若不然, 则存在 $y\in D(V)$, 使得 $Vy=y$, 这样对任意的 $z\in D(V)$,

$$(Vz-z,y)=(Vz,y)-(z,y)=(Vz,y)-(Vz,Vy)=(Vz,y-Vy)=0,$$

由于 R_{V-I} 在 X 中稠密, 故必有 $y\equiv 0$. 所以 1 不是 V 的特征值, 因此 $(I-V)^{-1}$ 存在. 令

$$A=(\lambda I-\overline{\lambda}V)(I-V)^{-1}.$$

下证 A 是对称算子, A 的 Cayley 变换就是 V. A 也可以用以下方法来定义: $D(A)=R_{I-V}$, 对任意的 $y\in D(V)$, 由 $(I-V)y\in R_{I-V}=D(A)$ 有

$$A(I-V)y=\lambda y-\overline{\lambda}Vy. \tag{3.1.10}$$

由条件 (2) 可知, $D(A)$ 在 X 中稠密. 此外, 当 $y_1,y_2\in D(V)$ 时,

$$\begin{aligned}(A(y_1-Vy_1),y_2-Vy_2)&=(\lambda y_1-\overline{\lambda}Vy_1,y_2-Vy_2)\\&=(\lambda+\overline{\lambda})(y_1,y_2)-\overline{\lambda}(Vy_1,y_2)-\lambda(y_1,Vy_2),\\(y_1-Vy_1,A(y_2-Vy_2))&=(y_1-Vy_1,\lambda y_2-\overline{\lambda}Vy_2)\\&=(\lambda+\overline{\lambda})(y_1,y_2)-\overline{\lambda}(Vy_1,y_2)-\lambda(y_1,Vy_2),\end{aligned}$$

于是

$$(A(y_1-Vy_2),y_2-Vy_2)=(y_1-Vy_1,A(y_2-Vy_2)).$$

因此 A 是对称算子. 令 $x=y-Vy$, $y\in D(V)$, 由式 (3.1.10) 有, $Ax=\lambda y-\overline{\lambda}Vy$, 由此得

$$Ax-\overline{\lambda}x=(\lambda-\overline{\lambda})y,\quad Ax-\lambda x=(\lambda-\overline{\lambda})Vy.$$

这证明了 V 是算子 A 的 Cayley 变换. □

根据上面结论立得下面的定理 3.1.5 成立.

定理 3.1.5 设 A_1, A_2 是 Hilbert 空间 X 上的稠定对称算子, V_1, V_2 是它们的 Cayley 变换, A_2 是 A_1 的扩张的充分必要条件是 V_2 是 V_1 的扩张.

定理 3.1.6 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的稠定对称算子,

(1) A 是闭算子的充分必要条件是 A 的 Cayley 变换 V 是闭算子;

(2) V 是闭算子的充分必要条件是 $R_{\overline{\lambda}}$ 与 R_λ 是闭子空间.

证明 设算子 A 是闭的, 并设序列

$$y_n=(A-\overline{\lambda}I)x_n,\quad x_n\in D(A),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{3.1.11}$$

收敛于某向量 y, 由算子 V 的等距性, 序列

$$Vy_n=(A-\lambda I)x_n,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{3.1.12}$$

也收敛于某个向量 z. 式 (3.1.11) 与式 (3.1.12) 相减得

$$y_n - Vy_n = (\lambda - \overline{\lambda})x_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

即有

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y_n - Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y - z), \quad n \to \infty,$$

而且

$$Ax_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y_n - \overline{\lambda} V y_n) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y - \overline{\lambda} z), \quad n \to \infty.$$

又因为算子 A 是闭算子, 所以 $y - z \in D(A)$, 并且

$$A(y - z) = \lambda y - \overline{\lambda} z.$$

于是

$$y = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}\left[A(y - z) - \overline{\lambda}(y - z)\right] = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(A - \overline{\lambda} I)(y - z) \in R_{\overline{\lambda}},$$

即 $y \in D(V)$, $Vy = z$. 从而得到 V 是闭算子, $R_{\overline{\lambda}}$ 也是闭集. 所以 R_λ 也是闭集.

反之, 由 V 是闭算子, 同样的办法可推出 A 是闭算子.

根据 V 的性质以及 $R_{\overline{\lambda}}$ 和 R_λ 是闭集, 很容易推出 V 是闭算子. □

上述三个结论表明: 稠定对称算子与等距算子形成一一对应, 研究对称算子的扩张问题归结为研究等距算子的扩张问题. 要解决对称算子的扩张问题, 还需要弄清楚对称算子的共轭算子定义域的构造, 下面 3.1.4 小节和 3.1.5 小节主要研究对称算子的共轭算子的定义域的构造, 给出其结构的刻画.

3.1.4 共轭算子的定义域

定义 3.1.7 设 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 是 X 的 n 个子空间, 等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \quad x_k \in M_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{3.1.13}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时才能成立, 那么称子空间 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 线性无关.

若 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 线性无关, 则空间 M 内的任何向量 x 可以唯一地表示为

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_k \in M_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{3.1.14}$$

称 M 为子空间 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的直和, 记为 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$.

定理 3.1.8 若 A 是 Hilbert 空间 X 上的闭对称算子, $\Im\lambda \neq 0$, 则子空间 $D(A)$, $N_{\overline{\lambda}}$, N_λ 线性无关, 且它们的直和与 $D(A^*)$ 重合, 即

$$D(A^*) = D(A) \oplus N_{\overline{\lambda}} \oplus N_\lambda. \tag{3.1.15}$$

证明 先证线性无关性. 设 $x+y+z=0$, 其中, $x\in D(A)$, $y\in N_{\overline{\lambda}}$, $z\in N_\lambda$. 将 $A^*-\overline{\lambda}I$ 作用于上式的两边得

$$(A^*-\overline{\lambda}I)x+(A^*-\overline{\lambda}I)y+(A^*-\overline{\lambda}I)z=0,$$

由于 $A^*y=\overline{\lambda}y, A^*z=\lambda z$, 所以

$$(A^*-\overline{\lambda}I)x+(\lambda-\overline{\lambda})z=0,$$

而且 $(A-\overline{\lambda}I)x\in R_{\overline{\lambda}}$, $(\lambda-\overline{\lambda})z\in N_\lambda$. 又 $\Im\lambda\neq 0$, $R_{\overline{\lambda}}^{\perp}=N_\lambda$, 所以

$$(A-\overline{\lambda}I)x=0,\ (\lambda-\overline{\lambda})z=0\ \Rightarrow\ z=0.$$

用 $(A-\overline{\lambda}I)^{-1}$ 作用上式两边, 得 $x=0$. 故 $x=0$, $y=0$, $z=0$, 即 $D(A)$, $N_{\overline{\lambda}}$, N_λ 线性无关.

其次证明式 (3.1.15). 由于 $D(A)$, $N_{\overline{\lambda}}$, N_λ 均含在 $D(A^*)$ 中, 所以

$$D(A)\oplus N_{\overline{\lambda}}\oplus N_\lambda\subset D(A^*).\tag{3.1.16}$$

下证式 (3.1.16) 的反包含关系成立. 任意 $u\in D(A^*)$, 往证 u 可以表示为 $u=x+y+z$ 即可, 其中, $x\in D(A)$, $y\in N_{\overline{\lambda}}$, $z\in N_\lambda$.

由于 A 是 Hilbert 空间 X 上的闭对称算子, 所以 $R_{\overline{\lambda}}$, R_λ 均为闭集. 又因为 $R_{\overline{\lambda}}^{\perp}=N_\lambda$, 所以 $X=R_{\overline{\lambda}}\oplus N_\lambda$. 对任意的 $v\in X$, 有 $v=v'+v''$, 其中, $v'\in R_{\overline{\lambda}}$, $v''\in N_\lambda$, 且分解是唯一的. 对于任意 $u\in D(A^*)$, 令 $v=(A^*-\overline{\lambda}I)u\in X$, 设 $v=v'+v''$, $v'\in R_{\overline{\lambda}}$, $v''\in N_\lambda$, 则

$$(A^*-\overline{\lambda}I)u=v'+v''.$$

由 $v'\in R_{\overline{\lambda}}$, 存在 $x\in D(A)$, 使得 $(A-\overline{\lambda}I)x=v'$; 由 $v''\in N_\lambda$, 令 $y=\dfrac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}v''\in N_\lambda$, 则

$$A^*y=\lambda y,\quad A^*x=Ax.$$

从而

$$\begin{aligned}(A^*-\overline{\lambda}I)u&=v'+v''=(A-\overline{\lambda}I)x+(\lambda-\overline{\lambda})y=(A-\overline{\lambda}I)x+(A^*-\overline{\lambda}I)y\\&=(A^*-\overline{\lambda}I)(x+y),\end{aligned}$$

所以

$$(A^*-\overline{\lambda}I)(u-x-y)=0,$$

即 $u=x+y+z$, 其中, $x\in D(A)$, $y\in N_\lambda$, $z\in N_{\overline{\lambda}}$. 因此

$$u \in D(A) \oplus N_{\overline{\lambda}} \oplus N_\lambda.$$

故 $D(A^*) = D(A) \oplus N_{\overline{\lambda}} \oplus N_\lambda$. □

推论 3.1.9　Hilbert 空间 X 上的闭对称算子 A 是自伴算子的充分必要条件是它的两个亏子空间均为零空间 (也就是亏指数等于 $(0,0)$).

定理 3.1.10　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的闭对称算子, A 是自伴算子的充分必要条件是 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

证明　A 是自伴算子, 显然 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

反之, 设 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 若 $n_+ > 0$, 则任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Im\lambda > 0$, 都有 $\lambda \in \sigma_p(A^*)$. 于是

$$R(A - \overline{\lambda} I) = N_{\overline{\lambda}}^{\perp} \neq X,$$

因此 $\overline{\lambda} \in \sigma_r(A)$, 即当 $n_+ > 0$ 时, $\sigma_r(A)$ 充满下半开平面. 同理若 $n_- > 0$, 则 $\sigma_r(A)$ 充满上半开平面. 与 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ 矛盾, 所以 $\mathrm{def}(n_+, n_-) = (0,0)$, 由推论 3.1.9 可知 A 是自伴的. □

定理 3.1.11　设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭对称算子, 则 A 的亏指数 $\mathrm{def}(A) = (n_+, n_-)$ 有四种可能性:

(1) $n_+ \neq 0$, $n_- = 0$;

(2) $n_+ = 0$, $n_- \neq 0$;

(3) $n_+ \neq 0$, $n_- \neq 0(n_+ = n_-$ 或 $n_+ \neq n_-)$;

(4) $n_+ = n_- = 0$.

若 $n_+ \neq 0$, $n_- = 0$, 则上半平面上的点 $\lambda(\Im\lambda > 0)$ 属于 $\sigma(A)$ (属于 $\sigma_r(A)$). 由于 $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ 是闭集, 故 $G \subset \sigma(A)$ 时有 $\overline{G} = \sigma(A)$. 因而闭上半平面是 A 的谱. 其余情况类似可得.

推论 3.1.12　设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子, 则 A 的谱集 $\sigma(A)$ 只能是以下四种情况之一:

(1) 闭上半平面;

(2) 闭下半平面;

(3) 整个复平面;

(4) 实轴上的闭子集 (此时 A 是自伴的).

3.1.5　Neumann 公式

设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的稠定对称算子, A^* 是 A 的共轭算子. 当 $\lambda = -\mathrm{i}$ 时, 分解式 $D(A^*) = D(A) \oplus N_{\overline{\lambda}} \oplus N_\lambda$ 表示为

$$D(A^*) = D(A) \oplus N_{\mathrm{i}} \oplus N_{-\mathrm{i}}, \tag{3.1.17}$$

即对任意 $x \in D(A^*)$ 可唯一地表示成

$$x = x^0 + x^- + x^+, \quad x^0 \in D(A),\ x^- \in N_{-\mathrm{i}},\ x^+ \in N_{\mathrm{i}}. \tag{3.1.18}$$

定理 3.1.13 (Neumann 公式)

$$\Im(A^*x, x) = \left|x^+\right|^2 - \left|x^-\right|^2. \tag{3.1.19}$$

证明 设 $x^+ \in N_{\mathrm{i}}$, $x^- \in N_{-\mathrm{i}}$, 则 $A^*x^+ = \mathrm{i}x^+$, $A^*x^- = -\mathrm{i}x^-$. 从而

$$(Ax^0, x^- + x^+) = \left(x^0, A^*(x^- + x^+)\right) = (x^0, -\mathrm{i}x^- + \mathrm{i}x^+),$$

并且,

$$\begin{aligned}(A^*x, x) &= (Ax^0 - \mathrm{i}x^- + \mathrm{i}x^+, x^0 + x^- + x^+)\\ &= (Ax^0, x^0) + (x^0, -\mathrm{i}x^- + \mathrm{i}x^+) + (-\mathrm{i}x^- + \mathrm{i}x^+, x^0)\\ &\quad -\mathrm{i}\left|x^-\right|^2 + \mathrm{i}\left|x^+\right|^2 - \mathrm{i}(x^-, x^+) + \mathrm{i}(x^+, x^-)\\ &= (Ax^0, x^0) + 2\Re\left[(x^0, -\mathrm{i}x^- + \mathrm{i}x^+) + \mathrm{i}(x^+, x^-)\right] + \mathrm{i}\left(\left|x^+\right|^2 - \left|x^-\right|^2\right).\end{aligned}$$

所以, $\Im(A^*x, x) = |x^+|^2 - |x^-|^2$. □

根据式 (3.1.19) 的符号对 $D(A^*)$ 进行分类, 分成三部分:

$$D^+ = \{x \in D(A^*) | \Im(A^*x, x) > 0\}; \tag{3.1.20}$$

$$D^- = \{x \in D(A^*) | \Im(A^*x, x) < 0\}; \tag{3.1.21}$$

$$D^0 = \{x \in D(A^*) | \Im(A^*x, x) = 0\}. \tag{3.1.22}$$

注 1 $x \in D(A^*)$ 时, $x \in D^+$, $x \in D^-$, 还是 $x \in D^0$ 是根据 $|x^+|^2 - |x^-|^2$ 的符号而言的.

注 2 D^+, D^-, D^0 有下列关系: $D(A) \subset D^0$, $N_{\mathrm{i}} \subset D^+ \cup \{0\}$, $N_{-\mathrm{i}} \subset D^- \cup \{0\}$.

事实上, $x \in D(A)$, 则 $x^- = x^+ = 0$, $|x^+|^2 - |x^-|^2 = 0$, 故 $x \in D^0$. 若 $x \neq 0$, $x \in N_{\mathrm{i}}$, 则 $x^0 = 0$, $x^+ = x \neq 0$, $x^- = 0$, 则 $|x^+|^2 - |x^-|^2 = |x^+|^2 > 0$, 从而 $x \in D^+$, 即知 $N_{\mathrm{i}} \subset D^+ \cup \{0\}$. 同样可得 $N_{-\mathrm{i}} \subset D^- \cup \{0\}$.

定义 3.1.14 设 M 和 N 是 X 的两个子空间, 如果 N 内仅有 n 个线性无关的向量, 使得它的任何线性组合除零向量外不属于 M, 那么, 数 n 称为子空间 N 按模 M 的维数, N 按模 M 的维数记为 $\dim(N/M)$.

注 1 $\dim(N/M) \neq \dim N$ 和 $\dim(N/M) + \dim M \neq \dim N$ 均不一定成立.

注 2 当 M 是 N 的子空间时, $\dim(N/M) = \dim N - \dim M$.

注 3 n_+, n_- 分别为算子 A 的亏指数, 则 $\dim(D(A^*)/D(A)) = n_+ + n_-$.

注 4 设 D 是 X 内的任一集合, 而 M 是 X 的子空间, 若 n 是 $D\cup\{0\}$ 内的最大子空间按模 M 的维数, 则称集合 D 按模 M 的维数为 n, 记为 $\dim(D/M)=n$.

定理 3.1.15 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子, m 和 n 分别为 A 的亏子空间 N_{i} 和 $N_{-\mathrm{i}}$ 的维数, 则集合 D^+, D^- 按模 $D(A)$ 的维数分别是 m 和 n, 即

$$\dim(D^+/D(A))=m,\quad \dim(D^-/D(A))=n. \tag{3.1.23}$$

证明 由于 $N_{\mathrm{i}}\subset D^+\cup\{0\}$, $N_{-\mathrm{i}}\subset D^-\cup\{0\}$, 所以

$$\dim(D^+/D(A))\geqslant m,\quad \dim(D^-/D(A))\geqslant n.$$

只需证明相反不等式即可. 只证其中一个, 另一个类似.

若 $m=\infty$, 则上式自然成立.

当 $m<\infty$ 时, 用反证法. 若 $\dim(D^+/D(A))>m$, 则在 D^+ 中有 $m+1$ 个线性无关的向量 $x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}$, 它们的任何非零组合含于 D^+ 生成的子空间, 而不含于 $D(A)$. 由于 $D^+\subset D(A^*)$, 所以 $x_j=x_j^0+x_j^-+x_j^+$, 其中, $x_j^0\in D(A)$, $x_j^-\in N_{-\mathrm{i}}$, $x_j^+\in N_{\mathrm{i}}$ $(j=1,2,\cdots,m+1)$. 又因 $\dim N_{\mathrm{i}}=m$, 所以 $x_1^+,x_2^+,\cdots,x_{m+1}^+$ 线性相关, 即存在不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_{m+1}$, 使得

$$c_1x_1^++c_2x_2^++\cdots+c_{m+1}x_{m+1}^+=0,$$

从而

$$\sum_{j=1}^{m+1}c_jx_j=\sum_{j=1}^{m+1}c_jx_j^0+\sum_{j=1}^{m+1}c_jx_j^-=x^0+x^-,$$

而

$$x^0=\sum_{j=1}^{m+1}c_jx_j^0\in D(A),\quad x^-=\sum_{j=1}^{m+1}c_jx_j^-\in N_{-\mathrm{i}},$$

故 $x^0+x^-\in D^-$, 与 $\sum\limits_{j=1}^{m+1}c_jx_j\in D^+$ 矛盾. 所以

$$\dim(D^+/D(A))\leqslant m,$$

故而 $\dim(D^+/D(A))=m$. □

我们可以利用 Neumann 公式再次证明: 对于定义在 Hilbert 空间 X 上的稠定对称算子而言, 其亏子空间的维数在上半平面和下半平面分别为常数, 与复数 λ 的选取无关.

引理 3.1.16 设 $\alpha > 0$, β 是任意实数, 则对称算子 A 及 $B = \alpha A + \beta I$ 的亏子空间 $N_{\rm i}^A$, $N_{-\rm i}^A$ 和 $N_{\rm i}^B$, $N_{-\rm i}^B$ 分别具有相同的维数.

证明 $D(A) = D(B)$, $D(A^*) = D(B^*)$, 任意 $x \in D(A^*) = D(B^*)$

$$\Im(B^*x, x) = \Im((\alpha A^* + \beta I)x, x) = \alpha\Im(A^*x, x).$$

所以, 关于算子 A 和 B 的 D^0, D^-, D^+ 均相同. 故

$$\dim N_{\rm i}^A = \dim(D^+/D(A)) = \dim(D^+/D(B)) = \dim N_{\rm i}^B,$$

$$\dim N_{-\rm i}^A = \dim(D^-/D(A)) = \dim(D^-/D(B)) = \dim N_{-\rm i}^B. \qquad \square$$

定理 3.1.17 对于上半平面的任何复数 $\lambda(\Im\lambda > 0)$,

$$\dim N_{\overline{\lambda}} = \dim N_{-\rm i}, \quad \dim N_\lambda = \dim N_{\rm i}. \tag{3.1.24}$$

证明 设 $\lambda = \sigma + {\rm i}\tau$, $\tau > 0$. 用 $N_{\rm i}^B$, $N_{-\rm i}^B$ 表示算子 $B = \tau A + \sigma I$ 的亏子空间, 则

$$(B - \lambda I) = (B - \sigma I - {\rm i}\tau I) = (\tau A + \sigma I - \sigma I - {\rm i}\tau I) = \tau(A - {\rm i}I),$$

即有 $(B^* - \overline{\lambda}I) = \tau(A^* + {\rm i}I)$, $(B^* - \lambda I) = \tau(A^* - {\rm i}I)$. 从而 $N_\lambda^B = N_{\rm i}^A$, $N_{\overline{\lambda}}^B = N_{-\rm i}^A$. 于是 $\dim N_{\rm i}^B = \dim N_{\rm i}^A$, $\dim N_{-\rm i}^B = \dim N_{-\rm i}^A$. 由引理 3.1.16 知

$$\dim N_\lambda = \dim N_\lambda^B = \dim N_{\rm i}^A = \dim N_{\rm i},$$

$$\dim N_{\overline{\lambda}} = \dim N_{\overline{\lambda}}^B = \dim N_{-\rm i}^A = \dim N_{-\rm i}. \qquad \square$$

3.1.6 对称算子的对称扩张的描述

3.1.3 小节给出了 Cayley 变换与闭稠定对称算子的对称扩张间的关系. 闭稠定对称算子 A 对应的 Cayley 变换 V 是一个闭等距算子, 若 V_1 是 V 的一个扩张, 则 V_1 对应的对称算子 A_1 也是 A 的一个扩张, 反之也成立. 从本结论可以得出闭稠定对称算子的扩张, 其实质上是一个等距算子的扩张, 本小节利用这一事实给出对称算子的对称扩张的描述.

在 Hilbert 空间 X 上研究对称算子的扩张, 也是研究其闭算子的扩张, 即若 A 是对称算子, $\overline{A}$ 是其闭包, 那么, A 的对称扩张算子 A_1 也是闭算子 $\overline{A}$ 的扩张. 因此, 本小节恒假设对称算子 A 是闭的.

定理 3.1.18 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子 A 的任何对称扩张 A', 都由某个以闭子空间 $D \subset N_\lambda = R_{\overline{\lambda}}^\perp$ 为定义域, 以 $R \subset N_{\overline{\lambda}} = R_\lambda^\perp$ 为值域的等距算子 U 所确定 $(\Im\lambda > 0)$. 而且, 对任意 $x' \in D(A')$, 有如下等式:

$$x' = x + z - Uz, \quad x \in D(A),\ z \in D; \tag{3.1.25}$$

$$A'x' = Ax + \lambda z - \overline{\lambda}Uz. \tag{3.1.26}$$

反之, 对任何这样的等距算子 U, 式 (3.1.25) 和式 (3.1.26) 确定了算子 A 的某个闭对称扩张 A', 同时算子 A' 的亏子空间是

$$N'_{\lambda} = N_{\lambda}\Theta D, \quad N'_{\overline{\lambda}} = N_{\overline{\lambda}}\Theta R. \tag{3.1.27}$$

证明 设 A 是闭稠定对称算子, A' 是 A 的闭对称扩张, 用 V 和 V' 分别表示算子 A 与 A' 的 Cayley 变换, 即对 $\Im\lambda > 0$,

$$V = (A - \lambda I)(A - \overline{\lambda} I)^{-1},$$

$$V' = (A' - \lambda I)(A - \overline{\lambda} I)^{-1}.$$

由于 $A \subset A'$, 所以 $V \subset V'$, 即有 $D(V) \subset D(V')$. 令

$$D = D(V') - D(V), \quad R = R_{V'} - R_V, \tag{3.1.28}$$

则

$$D \perp D(V) \Rightarrow D \perp R_{\overline{\lambda}}, \quad R \perp R_V \Rightarrow R \perp R_{\lambda}.$$

而 $N_{\lambda} = R_{\overline{\lambda}}^{\perp}$, $N_{\overline{\lambda}} = R_{\lambda}^{\perp}$, 所以 $D \subset N_{\lambda}$, $R \subset N_{\overline{\lambda}}$.

定义算子 $U : D \mapsto R$, 对任意 $x \in D$, $Ux = V'x$, 因为 V' 是等距算子, 所以 U 也是 $D \to R$ 上的等距算子. 由式 (3.1.28) 可知, 对任意 $y' \in D(V')$, $y' = y_V + y_D$. 其中, $y_V \in D(V)$, $y_D \in D$. 则有

$$V'y' = V'y_V + V'y_D = Vy_V + Uy_D.$$

又 $D(A') = R(I - V')$, $D(A) = R(I - V)$, 故对任意的 $x' \in D(A')$, 存在 $y' \in D(V')$, 使得 $x' = (I - V')y'$. 由于 y' 具有上述分解, 所以

$$x' = (I - V')(y_V + y_D) = (I - V')y_V + (I - V')y_D = (I - V)y_V + y_D - Uy_D.$$

故 $x' = x + z - Uz$, 其中,

$$x = (I - V)y_V \in R(I - V) = D(A), \quad z = y_D \in D \subset N_{\lambda}, \quad Uz = Uy_D \in R \subset N_{\overline{\lambda}}.$$

因此

$$A'x' = A'(x + z - Uz) = Ax + A'z - A'Uz = Ax + \lambda z - \overline{\lambda} Uz.$$

反之, 设 U 是给定了定义域为 $D \subset N_{\lambda}$, 而值域为 $R \subset N_{\overline{\lambda}}$ 的等距算子, 则对任意 $y \in D(V)$, $z \in D$. 令

$$V'(y + z) = Vy + Uz.$$

由于 $D(V) = R_{\overline{\lambda}}$, $N_{\lambda} = R_{\overline{\lambda}}^{\perp}$, $D \perp D(V)$, $R \perp R(V)$, 且 U 是等距算子, 所以对任意 x_1, $x_2 \in D(V) \oplus D = D(V')$, $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, $y_i \in D(V)$, $z_i \in D$ $(i = 1, 2)$, 因此

$$\begin{aligned}(V'x_1, V'x_2) &= (V'(y_1+z_1), V'(y_2+z_2)) = (Vy_1+Uz_1, Vy_2+Uz_2)\\ &= (Vy_1, Vy_2) + (Vy_1, Uz_2) + (Uz_1, Vy_2) + (Uz_1, Uz_2)\\ &= (y_1, y_2) + (z_1, z_2),\end{aligned}$$

而

$$(y_1+z_1, y_2+z_2) = (x_1, x_2),$$

故 V' 也是一个等距算子, 并且是 V 的扩张.

下证 V' 也是 A 的某个对称扩张的 Cayley 变换. 设 A' 是 V' 对应的闭对称算子,

$$A' = (\lambda - \overline{\lambda}V')(I-V')^{-1}, \quad D(A') = R(I-V').$$

对任意 $x' \in D(A') = R(I-V')$, 存在 $y_1 \in D(V')$, 使得 $x' = (I-V')y_1$. 而又 $D(V') = D(V) \oplus D$, 所以, 存在 $y \in D(V)$, $z \in D$, 使得 $y_1 = y + z$, 即

$$\begin{aligned}x' &= (I-V')y_1 = y_1 - V'y_1 = (y+z) - V'(y+z)\\ &= (y+z) - (Vy+Uz) = y - Vy + z - Uz = (I-V)y + z - Uz,\end{aligned}$$

其中, $y \in D(V)$, $x = (I-V)y \in R_{(I-V)} = D(A)$, $z \in D \subset N_\lambda$, $Uz \in R \subset N_{\overline{\lambda}}$. 所以, 任意 $x' \in D(A')$, 存在 $x \in D(A)$, $z \in D$, 使得 $x' = x + z - Uz$.

又因为 $D(A') \subset D(A) \oplus N_\lambda \oplus N_{\overline{\lambda}}$, 即 $A' \subset A^*$, 故

$$A'x' = A'(x + z - Uz) = Ax + \lambda z - \overline{\lambda}Uz.$$

由上面 A' 的构造可知, A' 的亏子空间

$$N'_\lambda = N_\lambda \Theta D, \quad N'_{\overline{\lambda}} = N_{\overline{\lambda}} \Theta R. \tag{3.1.29}$$

□

注 1 n_+ 与 n_- 均不为零时, A 可能具有对称扩张, 而且 A 的对称扩张也有无穷多个, n_+ 与 n_- 均小于无穷.

注 2 若 n_+ 或 n_- 有一为零时, A 没有对称扩张. $n_+ = n_- = 0$ 时, A 是自伴算子. 也就是说 n_+ 与 n_- 均不为零时 A 才有对称扩张.

注 3 A 具有自伴扩张 $\Leftrightarrow \dim N_\lambda = \dim N_{\overline{\lambda}} \Leftrightarrow n_+ = n_-$.

注 4 A' 是算子 A 的自伴扩张 $\Leftrightarrow N'_\lambda = N'_{\overline{\lambda}} = \{0\} \Leftrightarrow D = N_\lambda$ 且 $R = N_{\overline{\lambda}}$.

注 5 当 $n_+ \neq n_-$ 时, A 没有自伴扩张.

推论 3.1.19 (1) 在定理 3.1.18 中, 当且仅当 U 的定义域和值域分别与 N_λ 和 $N_{\overline{\lambda}}$ 一致时, 扩张 A' 是自伴的;

(2) 当且仅当算子 A 的亏子空间 $N_{\overline{\lambda}}$ 与 N_λ 具有相同维数, 即它的亏指数为 (n,n) 时, 算子 A 有自伴扩张.

当亏子空间 $N_{\overline{\lambda}}$ 和 N_λ 均为有限维空间时, 对称扩张 (特别是自伴扩张) 可以简单地写出. 我们所关心的是自伴扩张, 用 n 表示 $N_{\overline{\lambda}}$ 和 N_λ 的维数, 在 N_λ 内任选单位正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, $(e_i,e_j)=\delta_{ij}\ \ (i,j=1,2,\cdots,n)$. 在 $N_{\overline{\lambda}}$ 内任选单位正交基 $e'_1,e'_2,\cdots,e'_n$, $(e'_i,e'_j)=\delta_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.

对任意的 $z\in N_\lambda$, 有 $z=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n$. 任何以 $N_{\overline{\lambda}}$ 为定义域, N_λ 为值域的等距算子 U, 可由公式

$$Uz=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\xi_k\right)e'_j \tag{3.1.30}$$

给出, 其中 $U=(u_{jk})$ 是酉矩阵. 所以, 任对意的 $x'\in D(A')$, 若

$$x'=x+\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j-\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\xi_k\right)e'_j,\quad x\in D(A), \tag{3.1.31}$$

而且

$$A'x'=Ax+\lambda\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j-\overline{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\xi_k\right)e'_j, \tag{3.1.32}$$

则 A' 就是 A 的一个自伴扩张.

注 1　若亏子空间 $N_{\overline{\lambda}}$, N_λ 中有一个不为零空间, 则算子 A 有非平凡扩张 A'.

(1) A 是闭对称算子, 当且仅当它的亏子空间有一个等于零空间, 它的亏指数为 $(0,n)$ 或 $(n,0)$ 时, A 是最大的;

(2) 当且仅当 $N=N_{\overline{\lambda}}$ 或 $R=N_\lambda$ 时, 扩张 A' 是最大的;

(3) 若亏子空间 $N_{\overline{\lambda}}$, N_λ 是有限维的且有相同的维数, 则任何最大扩张是自伴的.

注 2　在定理 3.1.18 中, 如果闭稠定对称算子 A 具有有限的相同亏指数, 则对称算子 A 有自伴扩张算子 A', 即 $A\subset A'=A'^*\subset A^*$, 并且 $D(A')=D(A)\oplus N$, 其中, $N\subset N_{\mathrm{i}}\oplus N_{-\mathrm{i}}$, $\dim N=n^-=n^+=n$.

3.1.7　举例

在近代量子力学及许多工程技术问题中, 需要考虑高阶微分算子. 本小节考虑 $[0,\infty)$ 上实系数的 n 阶 $(n=2r\geqslant 2)$ 对称微分算式

$$l(y)=(-1)^r\left(p_r(x)y^{(r)}\right)^{(r)}+(-1)^{r-1}\left(p_{r-1}(x)y^{(r-1)}\right)^{(r-1)}+\cdots+(p_1(x)y')'+p_0y \tag{3.1.33}$$

在 $L^2[0,\infty)$ 上所生成的对称算子的亏指数以及扩张问题, 其中, 系数 $p_k(x)$ 是定义在区间 $[0,\infty)$ 上的实函数, 并且至少具有直到 k 阶的导数, $p_0(x),p_1(x),\cdots,p_{r-1}(x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 的任何紧子集上 Lebesgue 可积.

令 D_M 表示 $L^2[0,\infty)$ 内满足下述性质的函数所组成的线性流形:

(1) $y^{[n-1]}(x)$ 在 $[0,\infty)$ 的任何紧子集上绝对连续;

(2) $l(y)=y^{[n]}\in L^2[0,\infty)$. 其中, $y^{[k]}$ 表示 y 的拟导数:

$$y^{[k]}=y^{(k)},\quad k=0,1,\cdots,r-1,$$

$$y^{[r]}=p_r y^{(r)},$$

$$y^{[r+k]}=p_{r-k}y^{(r-k)}y-(y^{[r+k-1]})',\quad k=1,2,\cdots,r;$$

称 D_M 为式 (3.1.33) 的最大算子域, 相应地, 式 (3.1.33) 以 D_M 为定义域所生成的算子记为 L_M, 称为式 (3.1.33) 所生成的最大算子. 以 D_0' 表示 D_M 的如下子集: $y\in D_M$, 并且 y 在 $[0,\infty)$ 的某紧子集外为 0. 微分算式 (3.1.33) 以 D_0' 为定义域所生成的算子记为 L_0', 容易证明 D_0' 在 $L^2[0,\infty)$ 中是稠密的, 而且是对称的. 用 L_0 表示 L_0' 的闭包, 即 $L_0=\overline{L_0'}$, D_0 表示 L_0 的定义域. 容易验证 L_0 是 $L^2[0,\infty)$ 中的闭稠定对称算子, L_0 称为式 (3.1.33) 所生成的最小算子. 并且满足: $L_0^*=L_M$, D_0 解析描述如下:

$$D_0=\left\{y\in D_M\mid [y,z](a)=\lim_{b\to\infty}[y,z](b)=[y,z](\infty)=0,\forall z\in D_M\right\},\quad (3.1.34)$$

其中 $[y,z](x)$ 是关于 $l(y)$ 的 Langrange 双线性型, 即

$$\int_a^b l(y)\bar{z}\mathrm{d}x-\int_a^b y\overline{l(z)}\mathrm{d}x=[y,z]_a^b.\quad (3.1.35)$$

定理 3.1.20 对于 $[0,\infty)$ 上实系数的 n 阶 $(n=2r\geqslant 2)$ 对称微分算式 (3.1.33), 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定对称算子, 其亏指数 (m,m) 满足 $r\leqslant m\leqslant 2r$.

证明 实系数对称微分算子的亏指数相同, 且 $m\leqslant 2r$(因$l(y)=\lambda y$ 至多有 $2r$ 个线性无关的解). 下面只证明 $m\geqslant r$ 即可.

设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 是方程 $l(y)=\lambda y$ $(\Im\lambda\neq 0)$ 的一组属于 $L^2[0,\infty)$ 的线性独立解, $\varphi_{m+1},\varphi_{m+2},\cdots,\varphi_{2m}$ 是方程 $l(y)=\overline{\lambda}y$ 的一组属于 $L^2[0,\infty)$ 的线性独立解. 由于 $L_0^*=L_M$,

$$D_M=D_0\oplus N_{\overline{\lambda}}\oplus N_\lambda,$$

从而知任意 $y\in D_M$, 可唯一地表示为

$$y=y_0+\sum_{j=1}^{2m}c_j\varphi_j,$$

其中, $y_0 \in D_0$, c_j 是常数.

选取 D_M 中 $2r$ 个函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{2r}$ 满足 $\det(\psi_j^{(k-1)}(0)) \neq 0$ $(j, k = 1, 2, \cdots, 2r)$, 则 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{2r}$ 线性无关 (选取可行的, 如 $\psi_j^{(k-j)}(0) = \delta_{jk}$, $\psi_j^{(k-j)}(1) = 0$, $\psi_j(t) = 0$ $(t \geqslant 1)$).

对于每一个 $\psi_j \in D_M$, 可有如下表示

$$\psi_j = y_{j0} + \sum_{k=1}^{2m} \alpha_{jk}\varphi_k, \quad j = 1, 2, \cdots, 2r, \tag{3.1.36}$$

其中, $y_{j0} \in D_0$, 下证系数矩阵 (α_{jk}) 的秩不能小于 $2r$.

若不然, 存在不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_{2r}$, 使得 $(\alpha_{jk})_{2r\times 2m} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2r})^{\mathrm{T}}$, 且

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{2r}\alpha_{2r} = 0, \tag{3.1.37}$$

由此推知

$$\sum_{j=1}^{2r} c_j\alpha_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, 2m. \tag{3.1.38}$$

从而

$$\begin{aligned}\psi &= c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_{2r}\psi_{2r} = \sum_{j=1}^{2r} c_j y_{j0} + \sum_{j=1}^{2r} c_j \sum_{k=1}^{2m} \alpha_{jk}\varphi_k \\ &= \sum_{j=1}^{2r} c_j y_{j0} + \sum_{k=1}^{2m}\left(\sum_{j=1}^{2r} c_j\alpha_{jk}\right)\varphi_k = \sum_{j=1}^{2r} c_j y_{j0} \in D_0,\end{aligned}$$

而 $\psi \in D_0$, 于是 $\psi^{(k-1)}(0) = \sum_{j=1}^{2r} c_j\psi_j^{(k-1)}(0) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, 2r)$, 与 $\det(\psi_j^{(k-1)}(0)) \neq 0$ 矛盾. 从而 $\operatorname{rank}(\alpha_{jk}) \geqslant 2r$. 所以, $2m \geqslant 2r$, 即 $m \geqslant r$. □

设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是方程 $l(y) = 0$ 的一组线性无关的解, 满足条件

$$([\varphi_t, \varphi_s](0))_{1\leqslant t,s\leqslant n} = J,$$

其中 J 是如下的反 Hermite 矩阵

$$J = \mathrm{i}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix},$$

用 $[\varphi, \psi](x)$ 和 $Q(x)$ 分别表示对称微分算式 (3.1.33) 的 Lagrange 双线性型和契合矩阵, 即

$$\int_a^b l(y)\bar{z}\mathrm{d}x - \int_a^b y\overline{l(z)}\mathrm{d}x = [y,z](b) - [y,z](a) = [y,z]_a^b,$$

$$[y,z](x) = (Q(x)C(y), C(z)) = R(\bar{z})Q(x)C(y),$$

其中, $R(y) = (y(x), y'(x), \cdots, y^{[n-1]}(x))$, $C(y) = R(y)^{\mathrm{T}}$. 用 N^* 表示矩阵 N 的共轭转置, 用 N^{T} 表示矩阵 N 的转置.

定理 3.1.21[6] 对于 $[0,\infty)$ 上实系数的 n 阶 $(n = 2r \geqslant 2)$ 对称微分算式 (3.1.33), 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定对称算子, 设其亏指数 (m,m) 满足 $m = 2r$. 如果 M, N 是 $n\times n$ 矩阵, 满足条件

(1)

$$\mathrm{rank}(M\oplus N) = n, \tag{3.1.39}$$

(2)

$$NJN^* + MQ^{-1}(0)M^* = 0, \tag{3.1.40}$$

则 D_M 内由边条件

$$M\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{[n-1]}(0) \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} [y,\varphi_1](\infty) \\ [y,\varphi_2](\infty) \\ \vdots \\ [y,\varphi_n](\infty) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.1.41}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的自伴算子 L 的自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y\in D(L) \tag{3.1.42}$$

是一个自伴微分算子. 反之, 由 L_0 所生成的任何自伴算子 L 的自伴域都具有上述形式.

定理 3.1.22[153] 对于 $[0,\infty)$ 上实系数的 n 阶 $(n = 2r \geqslant 2)$ 对称微分算式 (3.1.33), 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定对称算子, 设其亏指数 (m,m) 满足 $r\leqslant m\leqslant 2r$, 如果 M, N 分别是 $m\times n$ 和 $m\times(2m-n)$ 矩阵, 满足条件

(1)

$$\mathrm{rank}(M\oplus N) = m, \tag{3.1.43}$$

(2)

$$NJN^* + MQ^{-1}(0)M^* = 0, \tag{3.1.44}$$

则 D_M 内由边条件

$$M\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{[n-1]}(0) \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} [y,\varphi_1](\infty) \\ [y,\varphi_2](\infty) \\ \vdots \\ [y,\varphi_{2m-n}](\infty) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.1.45}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的自伴算子 L 的自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y \in D(L)$$

是一个自伴微分算子. 反之, 由 L_0 所生成的任何自伴算子 L 的自伴域都具有上述形式.

定理 3.1.23[6]　对于 $[a,b]$ 上实系数的 n 阶 $(n = 2r \geqslant 2)$ 对称微分算式 (3.1.33), 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭的稠定对称算子, 如果 M, N 是 $n\times n$ 矩阵, 满足条件

(1)

$$\operatorname{rank}(M \oplus N) = n, \tag{3.1.46}$$

(2)

$$NQ^{-1}(b)N^* + MQ^{-1}(a)M^* = 0, \tag{3.1.47}$$

则 D_M 内由边条件

$$M\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{[n-1]}(a) \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \\ \vdots \\ y^{[n-1]}(b) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.1.48}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的自伴算子 L 的自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y \in D(L) \tag{3.1.49}$$

是一个自伴微分算子. 反之, 任何由 L_0 所生成的自伴算子 L 的自伴域具有上述形式.

推论 3.1.24[5]　对于 $[0,\infty)$ 上实系数的 2 阶对称微分算式

$$l(y) = -(p(x)y')' + q(x)y, \quad x \in [0,\infty), \tag{3.1.50}$$

其中, $p(x), q(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数, 且 $p^{-1}(x), q(x)$ 在 $[0,\infty)$ 的任何紧子集上 Lebsegue 可积. 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定对称算子, 其亏指数 (m,m) 满足 $1 \leqslant m \leqslant 2$, 即 $m=1$ 或 $m=2$.

1) 当 $m=1$ 时, 对称微分算式 (3.1.50) 称为极限点型的 (limit point), 则 D_M 内由边条件

$$\cos\alpha y(0)+\sin\alpha p(0)y'(0)=0 \tag{3.1.51}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的自伴算子 L 的自伴域, 即

$$Ly=l(y), \quad y\in D(L) \tag{3.1.52}$$

是一个自伴微分算子. 反之, 由 L_0 所生成的任何自伴算子 L 的自伴域都具有上述形式.

2) 当 $m=2$ 时, 对称微分算式 (3.1.50) 称为极限圆型的 (limit circle), 如果 M, N 是 2×2 矩阵, 满足条件

(1)

$$\operatorname{rank}(M\oplus N)=2, \tag{3.1.53}$$

(2)

$$NJN^*+MQ^{-1}(0)M^*=0, \tag{3.1.54}$$

其中 $J=Q^{-1}(0)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 D_M 内由边条件

$$M\begin{pmatrix} y(0) \\ p(0)y'(0) \end{pmatrix}-N\begin{pmatrix} [y,\varphi_1](\infty) \\ [y,\varphi_2](\infty) \end{pmatrix}=0 \tag{3.1.55}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的自伴算子 L 的自伴域, 即

$$Ly=l(y),\ y\in D(L) \tag{3.1.56}$$

是一个自伴微分算子. 反之, 由 L_0 所生成的任何自伴算子 L 的自伴域都具有上述形式.

3.2 对称算子的扩张算子的谱

3.1 节研究了对称算子的扩张问题, 我们自然而然地想弄清楚对称算子在扩张过程中, 其谱是如何变化的. 例如, 在推论 3.1.12 中, 我们知道对称算子的谱在复平面上的分布情况, 而扩张成自伴算子后其谱仅分布在实轴上, 谱点是如何变化的? 为了便于研究对称算子扩张后谱的变化情况, 引入谱核这一概念.

3.2.1 谱核

定义 3.2.1 对于定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定线性算子 A, 若对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 存在常数 $K = K(\lambda) > 0$, 使得对所有 $x \in D(A)$,

$$\|(A - \lambda I)x\| \geqslant K\|x\|, \tag{3.2.1}$$

则称数 λ 为算子 A 的正则型点 (point of regular type); A 的所有正则型点的全体称为算子的正则型域(domain of regularity), 记为 $\Pi(A)$, 即

$$\Pi(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists K(\lambda) > 0, \text{使得} \|(A - \lambda I)x\| \geqslant K\|x\|, \forall x \in D(A)\right\}. \tag{3.2.2}$$

由定义 3.2.1 可知, 算子 A 的正则点一定是算子 A 的正则型点, 即 $\rho(A) \subset \Pi(A)$; 反之, 当 $\lambda \in \Pi(A)$ 时, 虽然 $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在且有界, 但是 $\overline{R(A - \lambda I)} = \overline{D(A - \lambda I)^{-1}}$ 不一定是全空间, 所以反包含关系 $\rho(A) \supset \Pi(A)$ 不一定成立. 当 A 是自伴算子时, $(A - \lambda I)^{-1}$ 存在且有界, $\overline{R(A - \lambda I)} = \overline{D(A - \lambda I)^{-1}}$ 一定是全空间, 所以, 自伴算子 A 的正则点与正则型点相同, 即 $\rho(A) = \Pi(A)$.

定理 3.2.2 Hilbert 空间 X 上的任何线性算子 A 的正则型域是开集.

证明 设 λ_0 是 A 的正则型点, $\lambda_0 \in \Pi(A)$, 当 $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta < \frac{1}{2}K(\lambda_0)$ 时, 对任意 $x \in D(A)$, 有

$$\begin{aligned}\|(A - \lambda I)x\| &\geqslant \|(A - \lambda_0 I)x\| - |\lambda - \lambda_0|\,\|x\| \\ &\geqslant (K(\lambda_0) - \delta)\|x\| \geqslant \frac{1}{2}K(\lambda_0)\|x\|.\end{aligned}$$

所以 λ_0 的 δ 邻域内的任何一点均属于 $\Pi(A)$, 故 $\Pi(A)$ 是开集. □

定理 3.2.3 若 A 是稠定对称算子, 则任何非实数均属于它的正则型域.

证明 设 $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\tau \in \mathbb{C}$, 且 $\tau \neq 0$, 则对任意 $x \in D(A)$, 有

$$\begin{aligned}\|(A - \lambda I)x\|^2 &= ((A - \sigma I)x + \mathrm{i}\tau x, (A - \sigma I)x + \mathrm{i}\tau x) \\ &= \|(A - \sigma I)x\|^2 + |\tau|^2\|x\|^2 \geqslant |\tau|^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

所以 $\lambda \in \Pi(A)$. □

定义 3.2.4 集合 $\mathbb{C}\backslash\Pi(A)$ 称为算子 A 的谱核 (spectral kernel), 记为 $\sigma_k(A)$ 或 k_σ, 即

$$\sigma_k(A) = \mathbb{C}\backslash\Pi(A). \tag{3.2.3}$$

由定义 3.2.4 可知

(1) 由于 $\rho(A) \subset \Pi(A)$, 故 $\sigma_k(A) \subset \sigma(A)$, 即谱核是谱的一部分, 一般说来 $\sigma_k(A) \neq \sigma(A)$;

(2) 当 A 是自伴算子时, 由于 $\sigma_r(A)=\varnothing$, 则 $\rho(A)=\Pi(A)$ 且 $\sigma(A)=\sigma_k(A)$. 即自伴算子的谱核与谱是重合的;

(3) 由谱核的定义可知, 对于对称算子 A 而言, A 的所有特征值均属于 A 的谱核, 即 $\sigma_p(A)\subset\sigma_k(A)$. 而 $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在且无界的点也属于 A 的谱核, 称为谱核的连续部分. A 的连续谱也属于谱核, 所以 $\sigma_k(A)$ 中的点分为两类, 或者属于点谱, 或者属于连续谱;

(4) 若 A' 是对称算子 A 的扩张, 则由正则型域 $\Pi(A)$ 的定义可知, $\Pi(A)\supset\Pi(A')$, 从而 $\sigma_k(A')\supset\sigma_k(A)$. 所以 A' 的谱核的每一部分都包含 A 的谱核的对应部分;

(5) 若 A' 是对称算子 A 的自伴扩张, 则 $\sigma_k(A)\subset\sigma_k(A')=\sigma(A')\subset\mathbb{R}$.

定理 3.2.5 Hilbert 空间 X 上具有有限亏指数的稠定对称算子 A, 它的对称扩张不改变它的连续谱; 对于有相等的有限亏指数的闭稠定对称算子 A, 它的所有自伴扩张具有相同的连续谱.

证明 设 A' 是对称算子 A 的对称扩张, 则 $D(A')\supset D(A)$, $D(A')/D(A)$ 是有限维的, 而且 $(A'-\lambda I)D(A')/(A-\lambda I)D(A)$ 也是有限维的, 所以 $(A'-\lambda I)^{-1}$ 与 $(A-\lambda I)^{-1}$ 同时有界, 或同时无界 (因为有限维空间上的算子一定是有界算子). 故 A' 与 A 的连续谱是相同的, 即 $\sigma_c(A)=\sigma_c(A')$. 由上面证明便得后一结论. □

定理 3.2.6 定义在 Hilbert 空间 X 上的具有有限亏指数 (m,m) 的闭稠定对称算子 A 的扩张为自伴算子 A' 时, 其每一个特征值重数的增加不超过 m. 特别地, 新的特征值的重数不大于 m.

证明 设 A 是闭对称算子, 具有有限亏指数 (m,m), A' 是 A 的自伴扩张, λ 是算子 A 的 p 重特征值, 则 λ 也是算子 A' 的特征值.

用 $p+q$ 表示算子 A' 的特征值 λ 的重数, 并设 $q>m$, 取方程 $A'x=\lambda x$ 的一组线性无关解 $x_1,x_2,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q}$, 使得当 $k=1,2,\cdots,p$ 时, $x_k\in D(A)$. 又因为

$$\dim D(A')/D(A)=m,$$

而 $q>m$, 所以, 存在不全为零的数 α_k, 使得

$$\alpha_1x_{p+1}+\alpha_2x_{p+2}+\cdots+\alpha_qx_{p+q}\in D(A).$$

但是, 向量 $x=\alpha_1x_{p+1}+\alpha_2x_{p+2}+\cdots+\alpha_qx_{p+q}$ 是算子 A' 对应的特征向量. 它们与 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 线性无关, 矛盾. 故 $q\leqslant m$. □

推论 3.2.7 定义在 Hilbert 空间 X 上具有相等且有限亏指数的闭稠定对称算子 A 的任何自伴扩张 A' 具有相同的本质谱.

证明 由定理 3.2.5 和定理 3.2.6 立得. □

根据以上几个结论, 可以得到: 对定义在 Hilbert 空间 X 上的有相等且有限亏指数的闭稠定对称算子 A, 它的任一自伴扩张 A' 的谱具有以下特点: ①连续谱不变, 即 $\sigma_c(A')=\sigma_c(A)$; ②点谱仍然是点谱, 维数可能发生变化, 即 $\sigma_p(A)\subset\sigma_p(A')$; ③算子 A 在上下半平面上的剩余谱变成自伴算子 A' 的正则点, 即 $\sigma_r(A)\cap(\mathbb{C}^+\cup\mathbb{C}^-)\subset\sigma_p(A')$; ④算子 A 在实轴上的剩余谱部分成为自伴算子 A' 的点谱, 部分成为自伴算子 A' 的正则点.

3.2.2 两个子空间的张度

为了进一步研究对称算子的自伴扩张算子的谱, 引入两个子空间张度的概念.

定义 3.2.8 设 M_1,M_2 是 Hilbert 空间 X 的两个子空间, P_1,P_2 是分别投影在 M_1 和 M_2 上的投影算子, 差 P_1-P_2 的范数称为这两个子空间的张度 (aperture). 记为 $\theta(M_1,M_2)=\|P_1-P_2\|$.

由定义 3.2.8 可得这两个子空间的张度满足以下三条性质:

(1)

$$\theta(X-M_1,X-M_2)=\theta(M_1,M_2). \tag{3.2.4}$$

(2)

$$\theta(M_1,M_2)\leqslant 1. \tag{3.2.5}$$

事实上, $\theta(X-M_1,X-M_2)=\|(I-P_1)-(I-P_2)\|=\|P_1-P_2\|=\theta(M_1,M_2)$, 对于任意 $x\in X$, $P_2(I-P_1)x$ 与 $(I-P_2)P_1x$ 正交, 而且差等于 $(P_2-P_1)x$, 从而

$$\begin{aligned}\|(P_2-P_1)x\|^2&=\|P_2(I-P_1)x\|^2+\|(I-P_2)P_1x\|^2\\&\leqslant\|(I-P_1)x\|^2+\|P_1x\|^2=\|x\|^2,\end{aligned}$$

故 $\theta(M_1,M_2)\leqslant 1$.

(3) 若两个子空间中有一个含非零向量, 并且这个向量与另一子空间正交, 则 $\theta(M_1,M_2)=1$.

事实上, 若 $x\neq\theta$, $x\in M_1$, $x\perp M_2$, 则 $P_1x=x$, $P_2x=0$, $\|(P_1-P_2)x\|=\|x\|$, 故 $\|P_1-P_2\|=1$.

定理 3.2.9 设 M_1,M_2 是 Hilbert 空间 X 的两个子空间, 若 $\theta(M_1,M_2)<1$, 则

$$\dim M_1=\dim M_2. \tag{3.2.6}$$

证明 若 $\dim M_1>\dim M_2$, 则 M_1 内存在非零向量与 M_2 正交, 即存在 $x\in M_1$, 使得 $x\perp M_2$, $x\neq 0$. 由上面讨论知 $\theta(M_1,M_2)=1$, 而 $\theta(M_1,M_2)<1$, 矛盾. 只有 $\dim M_1=\dim M_2$. □

注 设 $s \in [0,1]$,$P(s)$ 是 X 上的投影算子, 若 $P(s)$ 关于 s 一致连续, 则 $P(s)X$ 关于不同 s 互相同构, 即 $\dim R(P(s)) = \dim P(s)X =$ 常数.

命题 3.2.10 张度的另一等价定义:

$$d_1 = \sup_{\substack{x\in M_2\\ x\neq 0}} \frac{\|(I-P_1)x\|}{\|x\|}, \quad d_2 = \sup_{\substack{x\in M_1\\ x\neq 0}} \frac{\|(I-P_2)x\|}{\|x\|}, \tag{3.2.7}$$

则

$$\theta(M_1, M_2) = \max\{d_1, d_2\}. \tag{3.2.8}$$

证明 由定义 3.2.8 得

$$\theta(M_1,M_2) = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|(P_2-P_1)x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)x\|^2 + \|(I-P_2)P_1x\|^2}}{\|x\|}.$$

当 $x \in M_1$ 时, $(I-P_1)x = 0$, $(I-P_2)P_1x = (I-P_2)x$. 于是

$$\theta(M_1,M_2) \geqslant \sup_{\substack{x\in M_1\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)x\|^2 + \|(I-P_2)P_1x\|^2}}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in M_1\\ x\neq 0}} \frac{\|(I-P_2)x\|}{\|x\|} = d_2.$$

同理得 $\theta(M_1,M_2) \geqslant d_1$, 从而 $\theta(M_1,M_2) \geqslant \max\{d_1,d_2\}$.

由 d_2 的定义可知, 对于 $\forall x \in X$, $\|(I-P_2)P_1x\|^2 \leqslant d_2^2\|P_1x\|^2$, 而

$$\begin{aligned}\|P_2(I-P_1)x\|^2 &= (P_2(I-P_1)x, P_2(I-P_1)x) = (P_2(I-P_1)x,(I-P_1)x)\\ &= \big(P_2(I-P_1)x,(I-P_1)^2x\big) = ((I-P_1)P_2(I-P_1)x,(I-P_1)x)\\ &\leqslant \|(I-P_1)P_2(I-P_1)x\|\,\|(I-P_1)x\|.\end{aligned}$$

根据 d_1 的定义可知 $\dfrac{\|(I-P_1)P_2(I-P_1)x\|}{\|P_2(I-P_1)x\|} < d_1$, 因而

$$\|P_2(I-P_1)x\|^2 \leqslant d_1\|P_2(I-P_1)x\|\,\|(I-P_1)x\|,$$

即

$$\|P_2(I-P_1)x\| \leqslant d_1\|(I-P_1)x\|.$$

由此推出

$$\begin{aligned}\|(I-P_2)P_1x\|^2 + \|P_2(I-P_1)x\|^2 &\leqslant d_2^2\|P_1x\|^2 + d_1^2\|(I-P_1)x\|^2\\ &\leqslant \max\{d_1^2,d_2^2\}(\|P_1x\|^2 + \|(I-P_1)x\|^2)\\ &\leqslant \max\{d_1^2,d_2^2\}\|x\|^2.\end{aligned}$$

所以

$$\theta(M_1, M_2) \leqslant \max\{d_1, d_2\}.$$

故 $\theta(M_1, M_2) = \max\{d_1, d_2\}$. □

定义 3.2.11 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子, 令 $N_\lambda = R(A-\lambda I)^\perp$($\lambda$ 可以为实数), 则 N_λ 称为 A 在 λ 点的亏空间. n_λ=dimN_λ 称为 A 在 λ 点的亏数.

定理 3.2.12 设 $\Pi(A)$ 是 Hilbert 空间 X 上闭稠定对称算子 A 的正则型域, 则 $\Pi(A)$ 的连通部分中任意点的亏数 n_λ 都相同, 且等于某常数.

证明 记 Γ 为 $\Pi(A)$ 的一个连通部分, P_λ 是在 N_λ 上的投影算子. 往证: 对任意的 $\lambda_0 \in \Gamma$, 存在 λ_0 的一个 δ 邻域 $U(\lambda_0, \delta)$, 使得任意的 $\lambda \in U(\lambda_0, \delta)$, $\theta(N_\lambda, N_{\lambda_0}) < 1$. 从而由定理 2.3.7 得 $n_\lambda = n_{\lambda_0}$, 即证明在 Γ 中 n_λ 是常数.

设 $\lambda_0 \in \Gamma$, 则由 Γ 为正则型连通部分知, λ_0 是正则型点, 故对任意的 $x \in D(A)$, 存在 $c = c(\lambda_0) > 0$, 使得

$$\|(A-\lambda_0 I)x\| \geqslant c\|x\|.$$

取充分小的 $\delta > 0$, 并使得 $\delta < \frac{1}{3}c$, 当 $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ 时, 对任意 $x \in D(A)$,

$$\|(A-\lambda I)x\| = \|(A-\lambda_0 I)x + (\lambda_0 - \lambda)x\| \geqslant \|(A-\lambda_0 I)x\| - |\lambda_0 - \lambda|\,\|x\| > \frac{2}{3}c\,\|x\|.$$

另外, P_{λ_0} 是在 N_{λ_0} 上的投影算子, 而 $R(A-\lambda_0)^\perp = N_{\lambda_0}$, 所以 $I - P_{\lambda_0}$ 是 $R(A-\lambda_0)$ 的投影算子. 从而, 当 $y \in N_\lambda$, 且 $\|y\| = 1$ 时, 存在 $x \in D(A)$, 使得

$$(A-\lambda_0 I)x = (I - P_{\lambda_0})y.$$

于是

$$\|(I-P_{\lambda_0})y\|^2 = ((I-P_{\lambda_0})y, (I-P_{\lambda_0})y) = (y, (I-P_{\lambda_0})y) = (y, (A-\lambda_0 I)x),$$

注意到 $y \perp (A-\lambda I)x$, 得

$$\begin{aligned}\|(I-P_{\lambda_0})y\| &\leqslant \sup_{x\in D(A)} \frac{|(y,(A-\lambda_0 I)x)|}{\|(A-\lambda_0 I)x\|} = \sup_{x\in D(A)} \frac{|(y,(A-\lambda I)x + (\lambda-\lambda_0)x)|}{\|(A-\lambda_0 I)x\|} \\ &= \sup_{x\in D(A)} \frac{|\lambda-\lambda_0|\,|(y,x)|}{\|(A-\lambda_0 I)x\|} \leqslant \sup_{x\in D(A)} \frac{\frac{1}{3}c\,\|x\|}{\|(A-\lambda_0 I)x\|} \\ &\leqslant \frac{\frac{1}{3}c\,\|x\|}{c\,\|x\|} = \frac{1}{3}.\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

类似可以证明, 当 $y \in N_{\lambda_0}$, 且 $\|y\| = 1$ 时,

$$\|(I-P_\lambda)y\| \leqslant \sup_{x\in D(A)} \frac{|\lambda-\lambda_0|\cdot|(y,x)|}{\|(A-\lambda I)x\|} \leqslant \frac{\frac{1}{3}c\|x\|}{\frac{2}{3}c\|x\|} = \frac{1}{2}. \tag{3.2.10}$$

由式 (3.2.9) 和式 (3.2.10) 得

$$\theta(N_\lambda, N_{\lambda_0}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

故 $\dim N_\lambda = \dim N_{\lambda_0}$, 即 $n_\lambda = n_{\lambda_0}$. □

对于定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子 A 而言, 上半平面和下半平面均属于其正则型域, 则有下列结论.

推论 3.2.13 若实轴上的某点 λ_0 属于定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子 A 的正则型域, 则它的两个亏指数相等, 并且等于在该点处的亏数 n_{λ_0}, 即 $\operatorname{def} A = (n_{\lambda_0}, n_{\lambda_0})$.

事实上, 在点 λ_0 的邻域内 A 的亏数为常数, 而 λ_0 属于连接上下半平面, λ_0 的这个邻域包含在 $\Pi(A)$ 内, 在该连通部分中亏数是常数 n_{λ_0}.

推论 3.2.14 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的亏指数为 (m,m) 的闭稠定对称算子, 若对某个实数 λ_0, 亏数 $n_{\lambda_0} < m$, 则 λ_0 属于算子 A 的任何自伴扩张 A' 的谱. 若 λ_0 不是算子 A 的特征值, 则 λ_0 属于算子 A' 的连续谱.

证明 由于 $n_{\lambda_0} \neq 0$, $n_{\lambda_0} < m$, 故 λ_0 属于 A 的谱核, 即 $\lambda_0 \in \sigma_k(A)$. 从而 $\lambda_0 \in \sigma_k(A')$, 所以, $\lambda_0 \in \sigma(A')$(否则, 若 $\lambda \notin \sigma_k(A)$, 则 $\lambda_0 \in \Pi(A)$, 从而 $n_{\lambda_0} = m$, 矛盾).

若 λ_0 不是 A 的特征值, 则 λ_0 属于算子 A 的谱核的连续部分, 所以 λ_0 属于自伴扩张 A' 的谱的连续部分. □

定理 3.2.15 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的具有有限亏指数 (m,m) 的闭稠定对称算子, 若 λ 是算子 A 的正则型的实点, 则存在算子 A 的自伴扩张 A', 使得 λ 是算子 A' 的 m 重特征值.

证明 设 N_λ 是算子 A^* 对应于特征值 λ 的特征子空间, 由推论 3.2.13 知 $\dim N_\lambda = m$, 定义 A' 如下:

$$\begin{aligned} &D(A') = D(A) \oplus N_\lambda, \\ &A'x = A^*x, \quad x \in D(A'), \end{aligned}$$

则 $A \subset A' \subset A^*$, $D(A) \subset D(A') \subset D(A^*)$, $A \subset (A')^* \subset A^*$. 对任意 $x, y \in D(A')$,

$$(A'x, y) = \big(x, (A')^* y\big) = (x, A^*y) = (x, A'y).$$

所以, A' 是对称算子.

又由于 $\dim N_\lambda = m$, A' 是对称算子, 则 $D(A')/D(A)$ 的维数等于 m. 而 $\dim D(A^*)/D(A) = 2m$, $\dim D(A^*)/D(A') = m$. 所以 A' 是 A 的最大对称扩张. 故 A' 是自伴算子. N_λ 是算子 A' 对应于特征值 λ 的特征子空间, 作为 A' 的特征值 λ 的重数等于 m (几何重数). □

推论 3.2.16 若 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上具有有限亏指数 (m,m) 的闭稠定对称算子, λ 是实数且不属于算子 A 的点谱, 则方程 $A^*x-\lambda x=0$ 的线性无关解的个数不超过 m.

证明 设 N_λ 是算子 A^* 对应于特征值 λ 的特征子空间, 定义 A'

$$D(A')=D(A)\oplus N_\lambda,$$
$$A'x=A^*x,\quad x\in D(A'),$$

则 A' 是对称算子 A 的对称扩张, 所以, $D(A')/D(A)$ 的维数不超过 m, 即 $\dim N_\lambda\leqslant m$. □

定理 3.2.17 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上具有有限亏指数 (m,m) 的闭稠定对称算子, 若 A^* 有实特征值 λ, 则存在算子 A 的自伴扩张 A', 使得 λ 也是 A' 的特征值.

证明 设 N_λ 是算子 A^* 对应于实特征值 λ 的特征子空间, 定义算子 B 如下:

$$D(B)=D(A)\oplus N_\lambda,$$
$$B(x_1+x_2)=Ax_1+\lambda x_2,\quad x_1\in D(A),\ x_2\in N_\lambda.$$

易证 B 是对称算子, 且具有有限亏指数, 算子 B 的自伴扩张也是算子 A 的自伴扩张, λ 是它的特征值. □

3.2.3 半有界算子的扩张

对于定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定对称算子 A, 若存在数 m, 使得对任意向量 $x\in D(A)$,

$$(Ax,x)\geqslant m\|x\|^2 \tag{3.2.11}$$

成立, 则对称算子 A 称为有下界的; 若存在数 M, 使得对任意向量 $x\in D(A)$,

$$(Ax,x)\leqslant M\|x\|^2 \tag{3.2.12}$$

成立, 则对称算子 A 称为有上界的.

有上界或有下界的对称算子, 称为半有界算子. 正定对称算子是有下界的对称算子, 因 $(Ax,x)\geqslant 0$.

任何半有界对称算子的问题均可归结为正定对称算子, 因为 $A-mI$ 和 $MI-A$ 均为正定对称算子.

设 A 是正定对称算子, 当 $\lambda<0$ 时,

$$\|(A-\lambda I)x\|^2=\|Ax\|^2-2\lambda(Ax,x)+\lambda^2\|x\|^2>\lambda^2\|x\|^2, \tag{3.2.13}$$

因此负半轴属于 A 的正则型域. 根据定理 3.2.12, 正定对称算子有相等的亏指数, 所以, 任何半有界算子均具有相等的亏指数, 因而任何半有界算子均具有自伴扩张.

定理 3.2.18 若 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上具有有限亏指数 (m,m) 的正定闭稠定对称算子, 则其任何自伴扩张的谱的负部分, 仅可能有有限个负特征值, 且它们的重数和不超过 m.

证明 设 A' 是算子 A 的自伴扩张, P_λ 是它的谱函数. 用 N 记投影算子 $P_{-0}=P_{-0}-P_{-\infty}$ 决定的子空间. 显然在 N 上算子 A 的谱是负的, 在 $X-N$ 上算子 A 的谱是非负的, 如果

$$\dim N \leqslant m,$$

定理成立.

若 $\dim N > m$, 则因为 $D(A')/D(A)$ 的维数等于 m, 而 $\dim N > m$, 所以存在 $x\in N$, $x\neq 0$, 使得 $x\in D(A)$, $A'x=Ax$, $(A'x,x)=\int_{-\infty}^{0}\lambda \mathrm{d}(P_\lambda x,x)<0$, 即 $(Ax,x)=(A'x,x)<0$. 与 A 正定矛盾, 故 $\dim N\leqslant m$. A' 有有限个负特征值, 所有负特征空间的维数小于 m. □

推论 3.2.19 若定义在 Hilbert 空间 X 上具有有限亏指数 (m,m) 的稠定对称算子 A 满足

$$(Ax,x)\geqslant c\|x\|^2,\quad x\in D(A), \tag{3.2.14}$$

或

$$(Ax,x)\leqslant M\|x\|^2,\quad x\in D(A), \tag{3.2.15}$$

则对称算子 A 的任何自伴扩张的谱在 c 的左边 (或相应地在 M 的右边) 仅可能有有限个特征值, 且它们的重数和不超过 m.

例 3.2.20 二阶微分算式

$$\tau y=-y'',\quad x\in(-\infty,\infty) \tag{3.2.16}$$

生成的微分算子 $A_0(A_0y=\tau y,\ D(A_0)=C_0^\infty(-\infty,\infty))$ 是本质自伴的, 所有自伴扩张具有相同的本质谱 $\sigma_e(A_0)=[0,\infty)$.

证明 根据推论 3.2.7 可知, A_0 的所有自伴扩张具有相同的本质谱且等于 A_0 的本质谱. 下面只需证明 $\sigma_e(A_0)=[0,\infty)$.

(1) 对于 $\forall y\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$,

$$(A_0y,y)=\int_{-\infty}^{\infty}|y'|^2\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

从而 $\sigma_e(A_0)\subset[0,\infty)$.

(2) 对于 $\forall\lambda\in[0,\infty)$, 设 $\hat{u}_m(t)=(2m/\pi)^{1/2}\mathrm{e}^{-m^2(t-\lambda^{1/2})^2}(m=1,2,\cdots)$, 则 $\hat{u}_m(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 并且 $\|\hat{u}_m\|=1$. 对 $\hat{u}_m(t)$ 作 Fourier 变换,

$$u_m(x) = (2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t,$$

则 $u_m(x) \in L^2(-\infty,\infty)$, 而且 $\|u_m(x)\| = \|\hat{u}_m(t)\| = 1$.

对于任意的 $f(x) \in L^2(-\infty,\infty)$, $\hat{f}(t)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换, $\hat{f}(t)$ 为连续函数, 则

$$|(f(x), u_m(x))| = |\langle\hat{f}, \hat{u}_m\rangle| = \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-m^2(t-\lambda^{1/2})^2}\hat{f}(t)\mathrm{d}t,$$

令 $x = m(t-\lambda^{1/2})$, 得

$$\begin{aligned}|(f(x), u_m(x))| &= \left(\frac{2}{\pi m}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\hat{f}\left(\frac{x}{m}+\lambda^{1/2}\right)\mathrm{d}x\\ &\leqslant c\frac{1}{m^{1/2}}|\hat{f}(\lambda^{1/2})| \to 0, \quad m\to\infty,\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

所以 $u_m(x) \xrightarrow{w} 0$.

(3)

$$\begin{aligned}\|(A_0-\lambda)u_m\|^2 &= \|-u_m''-\lambda u_m\|^2 = \|-\hat{u}_m''-\lambda u_m\|^2\\ &= \|(t^2-\lambda)\hat{u}_m\|^2 = \frac{2m}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2-\lambda)^2\mathrm{e}^{-2m^2(t-\lambda^{1/2})^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2m^2}+\frac{\sqrt{2}x}{m}\lambda^{1/2}\right)\mathrm{d}x \to 0, \quad m\to\infty.\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

所以 $\|(A_0-\lambda)u_m\| \to 0(m\to\infty)$, 即

$$(A_0-\lambda)u_m \xrightarrow{s} 0.$$

根据 (2) 和 (3) 可得 $\{u_m\}$ 是算子 A_0 对应于 λ 的 Weyl 序列, 则 $\lambda \in \sigma_e(A_0)$.

再由 (1) 得 $\sigma_e(A_0) = [0,\infty)$. □

定义 3.2.21 对于定义在 Hilbert 空间 X 上的正定自伴算子 A, 若存在正定自伴算子 B, 使得对任意向量 $x \in D(A)$, 有

$$(Ax, x) = (Bx, Bx)$$

恒成立, 称算子 B 是正定自伴算子 A 的平方根算子, 记为 $B = A^{1/2}$, 而且 $D(A) \subset D(B)$.

3.3 线性算子的扰动

一个算子 A 上叠加上另一个相对“小”的算子 B, 变成 $A+B$, 称为算子 A 的扰动 (摄动). 扰动问题就是指 A 的某些性质在扰动后能否保持? 有什么样的变化? 不仅在算子理论中重要, 在量子力学和原子物理学中也非常重要.

3.3.1 稠定算子的扰动

定义 3.3.1 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, $D(A)$ 上赋以图模 $[\![x]\!] = \|x\| + \|Ax\|$, 如果

(1) $D(B) \supset D(A)$;

(2) $B : (D(A), [\![\cdot]\!]) \to (X, \|\cdot\|)$ 是有界的,

称 B 是关于 A 有界的 (或称 B 是相关有界的).

注 1 条件 (2) 可以表示为 $\forall x \in (D(A), [\![\cdot]\!])$,

$$\|Bx\| \leqslant c[\![x]\!] = c(\|x\| + \|Ax\|). \tag{3.3.1}$$

注 2 条件 (2) 可以表示为如下的等价形式:

(2′) 存在 $a > 0, b > 0$ 使得

$$\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|, \quad \forall x \in D(A). \tag{3.3.2}$$

使式 (3.3.2) 成立的 a 的下确界称为 B 关于 A 的界.

(2″) 存在 $a' > 0, b' > 0$, 使得

$$\|Bx\|^2 \leqslant a'^2\|Ax\|^2 + b'^2\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A).$$

显然, 当 B 是有界算子时, B 关于 A 必有界, 而且界是 0.

定理 3.3.2 设 A, B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, B 关于 A 是有界的, 且 B 关于 A 的界小于 1. 在 $D(A)$ 上定义 $A+B$, $A+B$ 是可闭化算子的充分必要条件是 A 是可闭化的, 而且在此情形 $D(\overline{A+B}) = D(\overline{A})$.

证明 由于 B 关于 A 是有界的, 即 $\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|$, 而界小于 1, 故 $a < 1$, 则

$$(1-a)\|Ax\| - b\|x\| \leqslant \|(A+B)x\| \leqslant (1+a)\|Ax\| + b\|x\|.$$

对于任意的 Cauchy 序列 $\{x_n\} \subset D(A)$, $\{Ax_n\}$ 是 Cauchy 序列 $\Leftrightarrow \{(A+B)x_n\}$ 是 Cauchy 序列; 设 $x_n \to 0$, 则 $Ax_n \to 0 \Leftrightarrow (A+B)x_n \to 0$, 故 A 可闭化 $\Leftrightarrow (A+B)$ 可闭化. 设 A 可闭化, $A+B$ 也可闭化, $\forall x \in D(\overline{A})$, $\exists x_n \in D(A)$, $x_n \to x$, 同时 Ax_n 收敛. 由上述可知 $(A+B)x_n$ 也收敛, 所以, $x \in D(\overline{A+B}) \Rightarrow D(\overline{A}) \subset D(\overline{A+B})$. 同理 $D(\overline{A+B}) \subset D(\overline{A})$. □

推论 3.3.3 设 A, B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, B 关于 A 有界, 且界小于 1, 则 $A+B$ 是闭算子 $\Leftrightarrow A$ 是闭算子.

推论 3.3.4 Hilbert 空间 X 上任意稠定算子 A 和 T, 若 $D(A) = D(T)$, 存在非负常数 a', a'', b, 而且 $a' < 1, a'' < 1$, 使得对 $\forall x \in D(A)$, 有

$$\|Ax - Tx\| \leqslant a'\|Ax\| + a''\|Tx\| + b\|x\|, \tag{3.3.3}$$

则 A 可闭化 $\Leftrightarrow T$ 可闭化, 且 $D(\overline{A})=D(\overline{T})$.

证明 设 $B=T-A, T(\lambda)=A+\lambda B, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 则 $T(0)=A, T(1)=T$. $D(T(\lambda))=D(A)$, $Tx=T(\lambda)x+(1-\lambda)Bx$, $Ax=T(\lambda)x-\lambda Bx$, 记 $a=\max\{a',a''\}$, 由式 (3.3.4) 得

$$\|Bx\|\leqslant(a'+a'')\|T(\lambda)x\|+a\|Bx\|+b\|x\|,$$

故

$$\|Bx\|\leqslant\frac{a'+a''}{1-a}\|T(\lambda)x\|+\frac{b}{1-a}\|x\|.$$

令 $h=\dfrac{a'+a''}{1-a}$, 则

$$\|(\lambda'-\lambda)Bx\|\leqslant|\lambda'-\lambda|\,h\,\|T(\lambda)x\|+\frac{b\,|\lambda'-\lambda|}{1-a}\|x\|. \tag{3.3.4}$$

所以, 选取适当的 λ', 使得 $|\lambda'-\lambda|h<1$, 则 $T(\lambda)$ 可闭化 $\Leftrightarrow T(\lambda')$ 可闭化. 由 $\lambda=0$ 到 $\lambda=1$ 传递, 或由 $\lambda=1$ 到 $\lambda=0$ 传递, 推出 A 可闭化 $\Leftrightarrow T$ 可闭化. □

例 3.3.5 设 $\overline{X}=L^2[0,1], Au=u', D(A)=C_0^1[0,1], Bu=u(a)$, 其中, $a\in(0,1)$ 是一个给定点, $D(B)=C[0,1]$, 则 B 关于 A 有界, 而且 B 关于 A 的界为 0.

证明 对任意固定的自然数 n, 令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}}{a^n}, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{(1-a)^n}, & a\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

以及

$$h(x)=\begin{cases}(n+1)\left(\dfrac{x}{a}\right)^n, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ (n+1)\left(\dfrac{1-x}{1-a}\right)^n, & a\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $u(a)=\dfrac{1}{2}[(u',g)+(u,h)]$, 从而

$$|u(a)|\leqslant\frac{1}{2}(\|g\|\,\|u'\|+\|h\|\,\|u\|)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}\right)^{\frac{1}{2}}\|u'\|+\frac{1}{2}\frac{n+1}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\|u\|,$$

当 n 无限大时, $\|u'\|$ 的系数可以无限小, 故 B 关于 A 有界, 且 B 关于 A 的界为 0. □

定义 3.3.6 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, $D(A)$ 上赋以图模 $[\![x]\!]=\|x\|+\|Ax\|$, 如果

(1)$D(B) \supset D(A)$;

(2)$B : (D(A), [\![\cdot]\!]) \to (X, \|\cdot\|)$ 是紧的,

则称 B 是 A 紧的算子 (或称 B 是相关紧的).

如果 B 是 A 紧算子, 那么一定是 A 有界的 (因为 $\|Bx\| \leqslant c[\![x]\!] = c\|Ax\| + c\|x\|$).

命题 3.3.7 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, 若 B 是可闭化算子, 且 B 是 A 紧的, 则对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon > 0$, 使得

$$\|Bx\| \leqslant \varepsilon \|Ax\| + b_\varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in D(A). \tag{3.3.5}$$

证明 若不然, 必存在 $\varepsilon_0 > 0$, $x_n \in D(A)$, 使得

$$\|\mathrm{B}x_n\| \geqslant \varepsilon_0 \|Ax_n\| + n\|x_n\|.$$

取 $y_n = x_n / \|Bx_n\|$, 则 $\|y_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{\|Bx_n\|} < \dfrac{1}{n} \to 0$ $(n \to 0)$, 即 $y_n \to 0$. 而

$$\varepsilon_0[\![y_n]\!] = \varepsilon_0\|y_n\| + \varepsilon_0\|Ay_n\| \leqslant \varepsilon_0\|Ay_n\| + n\|y_n\| \leqslant \|By_n\| \leqslant 1,$$

所以, y_n 在 $D(A)$ 是有界点列. 故 By_n 在 $(X, \|\cdot\|)$ 中列紧. 因而 $\{By_n\}$ 存在收敛的子列, 设其在空间 X 中收敛于 z. 由 B 可闭化知, $z = 0$, 这与 $\|By_{n_j}\| = 1$ 矛盾. 定理得证. □

注 1 B 是可闭化的算子换成 A 是可闭化的算子, 不等式仍成立.

注 2 若 $y_n \to 0, \{Ay_n\}$ 有界, 则存在收敛的子列 $\{Ay_{n_i}\}$, 设其极限为 h,

$$(0, h) = \lim_{n_i \to \infty} (y_{n_i}, Ay_{n_i}) \in \overline{\Gamma(A)}, \tag{3.3.6}$$

由于 A 可闭化, 所以 $h = 0$, 从而 y_{n_i} 在 $(D(A), [\![\cdot]\!])$ 中可收敛到 0. 由 B 是 A 紧的知 $By_{n_i} \to 0$, 与 $\|By_{n_i}\| = 1$ 矛盾.

定理 3.3.8 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, B 是可闭化算子, 则 B 是 A 紧的当且仅当 B 是 $A + B$ 紧的.

证明 因为 $D(A + B) = D(A)$, $D(A) \subset D(B)$, 所以 $D(A + B) \subset D(B)$. 在 $D(A)$ 上由 A 产生的图模 $[\![\cdot]\!]_A$ 与由 $A + B$ 产生的图模 $[\![\cdot]\!]_{A+B}$ 等价.

事实上, B 是 A 紧的, $\exists b > 0$,

$$\|Bx\| \leqslant \frac{1}{2}\|Ax\| + b\|x\|,$$

由此可以推出 $[\![x]\!]_{A+B} = \|x\| + \|Ax + Bx\|$,

$$[\![x]\!]_{A+B} \leqslant (1 + b)\|x\| + \frac{3}{2}\|Ax\| \leqslant \max\left(\frac{3}{2}, 1 + b\right)[\![x]\!].$$

另外, 若 $d \geqslant 1+b$, 则

$$\begin{aligned} d[\![x]\!]_{A+B} &\geqslant d\|x\| + \|Ax+Bx\| \geqslant d\|x\| + \|Ax\| - \|Bx\| \\ &\geqslant (d-b)\|x\| + \frac{1}{2}\|Ax\| \geqslant \frac{1}{2}[\![x]\!]_A, \end{aligned}$$

所以

$$[\![x]\!]_{A+B} \geqslant \frac{1}{2d}[\![x]\!]_A.$$

因此 $B:(D(A),[\![\cdot]\!]_A) \to (X,\|\cdot\|)$ 是紧算子 $\Leftrightarrow B:(D(A),[\![\cdot]\!]_{A+B}) \to (X,\|\cdot\|)$ 是紧算子. □

3.3.2　自伴算子的扰动

自伴算子在小的对称扰动下是不改变其自伴性和相对稳定性的.

定理 3.3.9 (Kato-Rellich 定理)　设 X 是 Hilbert 空间, A 是定义在 X 上的自伴算子, B 是在 X 上的对称算子, B 关于 A 有界, 而且界小于 1, 则 $A+B$ 在 $D(A)$ 上是自伴算子.

证明　只需证明 $\exists \mu_0 > 0$, 使得 $X = R(A+B\pm \mathrm{i}\mu_0 I)$. 对于 $\forall \mu > 0, u \in D(A)$, 因为 A 自伴, $X = R(A \pm \mathrm{i}\mu I)$, 所以

$$\|(A\pm \mathrm{i}\mu I)u\|^2 = (Au \pm \mathrm{i}\mu u, Au \pm \mathrm{i}\mu u) = \|Au\|^2 + \mu^2\|u\|.$$

而且 $\forall x \in X$, 用 $(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x$ 代替上式的 u, 得到

$$\|x\|^2 = \left\|A(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x\right\|^2 + \mu^2\left\|(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x\right\|^2,$$

这说明 $\left\|A(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}\right\| \leqslant 1$ 且 $\left\|(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\mu}$.

又因为

$$A+B\pm \mathrm{i}\mu I = \left[B(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1} + I\right](A\pm \mathrm{i}\mu I),$$

所以, 为证明 $X = R(A+B\pm \mathrm{i}\mu_0 I)$, 只需证 $\exists \mu_0 > 0$, 使得

$$\left\|B(A\pm \mathrm{i}\mu_0 I)^{-1}\right\| < 1$$

即可.

因为 B 是 A 有界的, 界 $a<1$, 故 $\exists a', b > 0$, $a < a' < 1$, 使得

$$\|Bu\| \leqslant a'\|Au\| + b\|u\|, \quad \forall u \in D(A),$$

对于任意的 $x \in X$, 用 $(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x$ 代替 u, 得

$$\left\|B(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x\right\| \leqslant a'\left\|A(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x\right\| + b\left\|(A\pm \mathrm{i}\mu I)^{-1}x\right\| \leqslant \left(a'+\frac{b}{\mu}\right)\|x\|.$$

取 μ_0 足够大, 使得 $a'+\dfrac{b}{\mu_0}<1$. 由此可以得到 $\left\|B(A\pm \mathrm{i}\mu_0 I)^{-1}\right\|<1$, 以及 $R(A+\mathrm{i}\mu_0 I)=X$. 从而得 $A+B\pm \mathrm{i}\mu_0 I$ 可逆, 并且 $R(A+B\pm \mathrm{i}\mu_0 I)=X$. □

例 3.3.10 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上考虑 Schrödinger 算子

$$H=-\Delta+V(x), \tag{3.3.7}$$

其中, $V(x)=V_1(x)+V_2(x)$, $V_1(x),V_2(x)$ 都是实值函数, $V_1(x)\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $V_2(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. 令 $D(-\Delta)=H^2(\mathbb{R}^3)$, $-\Delta$ 是自伴算子, 又设 $D(V)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3)|Vu\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$, 于是 V 也是自伴算子. 显然, $D(-\Delta)\subset D(V)$, H 在 $D(-\Delta)$ 上是自伴的.

证明 设 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\|V_2u\|_{L^2}\leqslant \|V_2\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2},$$

$$\|V_1\mathrm{u}\|_{L^2}\leqslant \|V_1\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty},$$

由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty}&\leqslant\int|\hat u(\xi)|\mathrm{d}\xi=\int(1+|\xi|^2)\,|\hat u(\xi)|\,\frac{1}{1+|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\\&\leqslant C\left\|(1+|\xi|^2)\hat u(\xi)\right\|_{L^2}\leqslant C\|\hat u\|_{L^2}+C\left\||\xi|^2\hat u(\xi)\right\|_{L^2},\end{aligned}$$

其中 $\hat u(\xi)$ 表示 u 的 Fourier 变换. $\forall\lambda>0$, 令 $u_\lambda(x)=u\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$, 则 $\hat u(\xi)=\lambda^3\hat u(\lambda\xi)$, $\|u_\lambda\|_{L^\infty}=\|u\|_{L^\infty}$, $\|\hat u_\lambda\|_{L^2}=\lambda^{3/2}\|\hat u\|_{L^2}$, $\left\||\xi|^2\hat u_\lambda(\xi)\right\|_{L^2}=\lambda^{-\frac12}\left\||\xi|^2\hat u\right\|_{L^2}$, 所以

$$\|u\|_{L^\infty}\leqslant C\lambda^{-\frac12}\left\||\xi|^2\hat u\right\|_{L^2}+C\lambda^{\frac32}\|\hat u\|_{L^2}=C_1\lambda^{-\frac12}\|\Delta u\|_{L^2}+\mathrm{C}\lambda^{\frac32}\|u\|_{L^2}.$$

选取 λ 充分大, 使得 $\lambda>C_1^2\|V_1\|_{L^2}^2$, 于是

$$\|Vu\|_{L^2}\leqslant\|V_1u\|_{L^2}+\|V_2u\|_{L^2}\leqslant a\|\Delta u\|_{L^2}+b\|u\|_{L^2},$$

其中, $a=C_1\lambda^{-\frac12}\|V_1\|_{L^2}<1, b=\|V_2\|_{L^\infty}+C\lambda^{\frac32}\|V_1\|_{L^2}$. 上述不等式对于每一个 u 也成立, 故 V 关于 $-\Delta$ 是有界的, 而且界 $a<1$, 由 Kato-Rellich 定理知, H 在 $H^2(\mathbb{R}^3)$ 上自伴. □

推论 3.3.11 设 X 是 Hilbert 空间, A 是定义在 X 上的本质自伴算子, B 是定义在 X 上的对称算子. 若 B 关于 A 有界, 且界 $a<1$, 则 $A+B$ 也是本质自伴的.

证明 由于 B 关于 A 有界, 则 $\exists a', b' > 0$, $a' < 1$, 使得

$$\|Bx\|^2 \leqslant a'^2 \|Ax\|^2 + b'^2 \|x\|^2, \quad \forall x \in D(A). \tag{3.3.8}$$

考虑闭算子 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$, 下证 $\overline{B}$ 关于 $\overline{A}$ 有界, 且界 $a < 1$.

$\forall x \in D(\overline{A})$, $\langle x, Ax\rangle \in \Gamma(\overline{A})$, $\exists \langle x_n, Ax_n\rangle \in \Gamma(A)$, 使得 $\langle x_n, Ax_n\rangle \to \langle x, \overline{A}x\rangle$. 于是 $\{x_n\}$ 和 $\{\mathrm{A}x_n\}$ 是 X 中 Cauchy 列, 因此 $\{Bx_n\}$ 也是 Cauchy 列, 所以 $\langle x_n, Bx_n\rangle \to \langle x, \overline{B}x\rangle$. 这说明 $x \in D(\overline{B})$, 因此, $D(\overline{A}) \subset D(\overline{B})$.

在不等式 (3.3.8) 中, 用 x_n 代替 x, 令 $n \to \infty$, 得到

$$\|\overline{B}x\|^2 \leqslant a'^2 \|\overline{A}x\|^2 + b'^2 \|x\|^2.$$

因此, $\overline{B}$ 关于自伴算子 $\overline{A}$ 有界, 而且 $\overline{B}$ 关于 $\overline{A}$ 的界 $a < 1$. 由 Kato-Rellich 定理 $\overline{A} + \overline{B}$ 是闭算子. 而 $\overline{A} + \overline{B} \supset A + B$, 所以 $\overline{A} + \overline{B} \supset \overline{A + B}$.

另一方面, 由 $\langle x_n, (A + B)x_n\rangle \to \langle x, (\overline{A} + \overline{B})x\rangle \in \overline{\Gamma(A + B)} = \Gamma(\overline{A + B})$ 可以推出, $x \in D(\overline{A + B})$, 且 $(\overline{A + B})x = (\overline{A} + \overline{B})x$, 从而 $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. 所以 $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A + B}$, 即 $A + B$ 是本质自伴的. □

同样方法可以证明如下结论.

定理 3.3.12 设 A 和 T 是 Hilbert 空间 X 上的两个对称算子, $D(A) = D(T) = D$, 并且

$$\|(T - A)x\| \leqslant a' \|Ax\| + a'' \|Tx\| + b \|x\|, \quad \forall x \in D, \tag{3.3.9}$$

其中, a', a'', b 是非负常数, 且 $a' < 1$, $a'' < 1$. 那么 A 本质自伴的充要条件是 T 本质自伴, 此时 $D(\overline{A}) = D(\overline{T})$; A 自伴当且仅当 T 是自伴算子.

定理 3.3.13 设 X 是 Hilbert 空间, A 是 X 上的自伴算子, B 是 X 上的对称算子. 若 B 关于 A 是有界的, 且界 $a = 1$, 即

$$\|Bx\| \leqslant \|Ax\| + b \|x\|, \tag{3.3.10}$$

则 $A + B$ 在 $D(A)$ 上本质自伴.

证明 要证 $A + B$ 本质自伴, 只需证 $\mathrm{Ker}((A + B)^* \pm \mathrm{i}I) = \{0\}$ 即可. 假设 $((A + B)^* - \mathrm{i}I)h = 0$, 只需证明 $h = 0$.

因为 B 关于 A 有界, 界 $a = 1$, 所以 $\forall t < 1$, tB 关于 A 有界, 界为 t. 故 $A + tB$ 在 $D(A)$ 上是自伴的, 且 $R(A + tB + \mathrm{i}I) = X$.

设 $x_t \in D(A)$, 使得 $(A + tB + \mathrm{i}I)x_t = h$, 于是

$$\|h\|^2 = \|x_t\|^2 + \|(A + tB)x_t\|^2,$$

从而

$$\|x_t\|^2 \leqslant \|h\|^2, \quad \|(A+tB)x_t\|^2 \leqslant \|h\|^2. \tag{3.3.11}$$

设 $y_t = h-(t-1)Bx_t$, 则

$$\begin{aligned}(y_t,h) &= (h-(t-1)Bx_t,h) = ((A+tB+\mathrm{i}I)x_t-(t-1)Bx_t,h)\\ &= ((A+B+\mathrm{i}I)x_t,h) = (x_t,((A+B)^*-\mathrm{i}I)h) = 0,\end{aligned}$$

又由于 $\forall u \in D(A)$, $\|Bu\| \leqslant \|Au\| + c\|u\|$, 所以

$$\|Ax_t\| \leqslant \|(A+tB)x_t\| + \|tBx_t\| \leqslant \|(A+tB)x_t\| + t\|Ax_t\| + tc\|x_t\|.$$

根据不等式 (3.3.11) 及上式得

$$(1-t)\|Ax_t\| \leqslant \|(A+tB)x_t\| + tc\|x_t\| \leqslant \|h\| + tc\|h\| \leqslant (1+c)\|h\|,$$

而 $(1-t)\|Bx_t\| \leqslant (1-t)\|Ax_t\| + (1-t)c\|x_t\| \leqslant (1+2c)\|h\|$, 由 y_t 的定义以及 $\|y_t\| = \|h-(t-1)Bx_t\| \leqslant \|h\| + (1-t)\|Bx_t\|$, 得

$$\|y_t\| \leqslant (2+2c)\|h\|.$$

于是, $\forall u \in D(A)$, $\lim\limits_{t\to 1}(y_t-h,u) = \lim\limits_{t\to 1}((1-t)Bx_t,u)$, 即

$$\lim_{t\to 1}(1-t)(x_t,Bu) = 0.$$

又因为 $\|x_t\| \leqslant h$, 所以, $\|x_t\|$ 一致有界. 由此推出 $y_t \xrightarrow{w} h$, 即

$$0 = \lim_{t\to 1}(y_t,h) = (h,h),$$

即 $h \equiv \theta$, 故 $\mathrm{Ker}((A+B)^*-\mathrm{i}I) = \{0\}$. 同理可证 $\mathrm{Ker}((A+B)^*+\mathrm{i}I) = \{0\}$. □

推论 3.3.14 设 X 是 Hilbert 空间, A 是 X 上的本质自伴算子, B 是 X 上的对称算子. 若 B 关于 A 有界, 且界 $a=1$, 则 $A+B$ 在 $D(A)$ 上本质自伴.

证明 考虑闭算子 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$, A 是自伴算子, B 是对称算子, 由于 B 关于 A 有界, 且 B 关于 A 的界 $a=1$, 于是 $\overline{A}+\overline{B}$ 在 $D(A)$ 上本质自伴.

由于 $\overline{A+B}$ 闭对称, $\overline{A}+\overline{B}$ 本质自伴, 故 $\overline{A+B}$ 也是自伴的. □

定理 3.3.15 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, A 是下半有界的自伴算子, B 是对称算子, B 关于 A 有界, 且界 $a<1$, 则 $A+B$ 也是下半有界的自伴算子. 设 A 的下界为 M_A, $A+B$ 的下界为 M_{A+B}, 若常数 a,b 适合 $0<a<1$, $b>0$, $\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|$, $\forall x \in D(A)$, 则

$$M_{A+B} \geqslant M_A - \max\left\{\frac{b}{1-a}, b+a|M_A|\right\}. \tag{3.3.12}$$

证明　由 Kato-Rellich 定理知, $A+B$ 是自伴的. 只需证明 $A+B$ 下半有界. 设 T 是一个下半有界的自伴算子, 界 $M_T \geqslant c \Leftrightarrow (-\infty, c) \subset \rho(T)$. 当 $\lambda < c$ 时,

$$\|R_\lambda(T)\| \leqslant |(M_T - \lambda)^{-1}|. \tag{3.3.13}$$

又由于 $TR_\lambda(T) = \lambda R_\lambda(T) - I$, 所以 $TR_\lambda(T)$ 是有界的, 而且

$$\|TR_\lambda(T)\| \leqslant \sup_{\xi \in \sigma(T)} |\xi| (\xi - \lambda)^{-1} \leqslant \max\{1, |M_T| (M_T - \lambda)^{-1}\}.$$

对自伴算子 A, 数 $c < M_A - \max\left\{\dfrac{b}{1-a}, b + a|M_A|\right\}$. 往证 $(-\infty, c) \subset \rho(A+B)$. $\forall \lambda < c$, 由 $\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|$ 有

$$\begin{aligned}\|BR_\lambda(A)\| &\leqslant a\|AR_\lambda(A)\| + b\|R_\lambda(A)\| \\ &\leqslant a\max\{1, |M_A| (M_A - c)^{-1}\} + b(M_A - c)^{-1} \\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

因为 $\lambda I - (A+B) = (I - BR_\lambda(A))(\lambda I - A)$, 所以, 当 $\lambda < c$ 时, $(\lambda I - (A+B))^{-1}$ 存在, 故 $\lambda \in \rho(A+B)$. $\left(若\ \dfrac{b}{1-a} > b + a|M_A|, 则\ \dfrac{1-a}{b}|M_A| < 1, \dfrac{b}{1-a} < b + a|M_A|\right.$ 也成立.$\Big)$ □

3.4　自伴算子的谱集在扰动下的变化

自伴算子在相关扰动下, 其谱是如何变化的? 这是一个比较复杂的问题. 本节在 3.3 节的基础上研究 Hilbert 空间 X 上的自伴算子 A 在满足一定条件的对称算子 B 的扰动下, 得到新的算子 $A+B$ 的谱 $\sigma(A+B)(=\sigma_d(A+B) \cup \sigma_e(A+B))$ 与算子 A 的谱 $\sigma(A)(=\sigma_d(A) \cup \sigma_e(A))$ 之间有怎样的联系? 也就是在相关扰动下 $\sigma_d(A), \sigma_e(A)$ 是如何变化的?

设 X 是 Hilbert 空间, A 是 X 上的自伴算子, B 是 X 上的对称算子. 设 B 关于 A 有界, B 关于 A 的界小于 1. 于是存在常数 a, b, $0 < a < 1, b > 0$, 使得 $\forall x \in D(A)$,

$$\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|, \tag{3.4.1}$$

由 Kato-Rellich 定理知, $A+B$ 是自伴算子.

先研究 $\sigma_d(A)$ 中点在对称算子 B 的扰动下的变化, $\forall \lambda_0 \in \sigma_d(A)$, λ_0 是 $\sigma(A)$ 的孤立点, 设 $\dim \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - A) = m$, 即 λ_0 是 m 重特征值. 由于 λ_0 是孤立点, 所以 $\exists r > 0$, 使得 $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \cap \sigma(A) = \{\lambda_0\}$, 令

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \ |z - \lambda_0| \leqslant \frac{r}{2} \right\}, \tag{3.4.2}$$

设 $\Gamma = \partial D$, 则 $\Gamma \subset \rho(A)$.

定理 3.4.1 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, B 是 X 上的对称算子, B 关于 A 有界的, 且界小于 1, 即 $0 < a < 1, b > 0$. 如果 $\lambda_0 \in \sigma_d(A)$, λ_0 是 m 重特征值, r 满足

$$2a(|\lambda_0| + r) + 2b < r, \tag{3.4.3}$$

那么 $A + B$ 是自伴算子, $A + B$ 在 $\left(\lambda_0 - \frac{r}{2}, \lambda_0 + \frac{r}{2}\right)$ 中恰有 m 个点谱 (有重数的按重数计算), 并且在此区间内没有其他点谱.

证明 $s \in [0,1]$, 令 $T_s = A + sB$, 于是 $T_0 = A, T_1 = A + B$. 由 Kato-Rellich 定理知, T_s 是自伴算子. 记 T_s 的谱族为 $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, E^{T_s})$, A 的谱族为 $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, E^A)$, 其中 $E^A = E^{T_0}$, 于是 $\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - A) = E^A(D)X$.

下证 $\dim E^{T_s}(D)X$ 是一个常数, 于是 $\dim E^{T_1}(D)X = \dim E^{T_0}(D)X = m$, 这就说明 $A+B$ 在 $\left(\lambda_0 - \frac{r}{2}, \lambda_0 + \frac{r}{2}\right)$ 中恰有 $A+B$ 的 m 个点谱, 并且没有其他谱类. 分两步证明.

首先, 证明 $\Gamma \subset \rho(T_s)$. 对 $\forall \xi \in \Gamma$, 有

$$\|R_\xi(A)\| = \left\|(\xi I - A)^{-1}\right\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\xi - \lambda|^{-1} = \frac{2}{r},$$

因为 $AR_\xi(A) = \xi R_\xi(A) - I$, $|\xi| \leqslant |\lambda_0| + \frac{r}{2}$, 所以

$$\|AR_\xi(A)\| \leqslant 1 + |\xi| \, \|R_\xi(A)\| \leqslant 1 + \frac{2\,|\xi|}{r} \leqslant \frac{2(r + |\lambda_0|)}{r}.$$

令

$$h = \frac{2a(r + |\lambda_0|) + 2b}{r},$$

由式 (3.4.3) 知, $h < 1$. 根据 $\|sBx\| \leqslant sa\,\|Ax\| + sb\,\|x\|$ 得

$$\begin{aligned} \|sBR_\xi(A)\| &\leqslant sa\,\|AR_\xi(A)\| + sb\,\|R_\xi(A)\| \\ &\leqslant \frac{2sa(r + |\lambda_0|)}{r} + \frac{2sb}{r} = sh < 1. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

由于 $\xi I - T_s = (I - sBR_\xi(A))(\xi I - A)$, 根据式 (3.4.4) 以及 $\xi \in \Gamma \subset \rho(A)$ 可知等式右端均可逆, 从而左端也可逆, 所以 $(\xi I - T_s)^{-1} = R_\xi(A)(I - sBR_\xi(A))^{-1} \in B(\overline{X})$. 因此, $\xi \in \rho(T_s)$, 故 $\Gamma \subset \rho(T_s)$. 而且有如下估计:

$$\|R_\xi(T_s)\| \leqslant \|R_\xi(A)\| / (1 - \|sBR_\xi(A)\|) \leqslant \frac{2}{r(1 - hs)} \leqslant \frac{2}{r(1-h)}, \tag{3.4.5}$$

$$\|AR_\xi(T_s)\| \leqslant \|AR_\xi(A)\| / (1 - \|sBR_\xi(A)\|) \leqslant \frac{2(r + |\lambda_0|)}{r(1-h)}. \tag{3.4.6}$$

其次, 证明谱投影 $E^{T_s}(D)$ 关于 s 的连续性. 设 $s,t\in[0,1],\xi\in\Gamma$, 则

$$R_\xi(T_t)-R_\xi(T_s)=(s-t)R_\xi(T_t)BR_\xi(T_s), \tag{3.4.7}$$

根据式 (3.4.1) 以及式 (3.4.5) 和式 (3.4.6) 得

$$\|BR_\xi(T_s)\|\leqslant a\|AR_\xi(T_s)\|+b\|R_\xi(T_s)\|\leqslant\frac{2a(r+|\lambda_0|)+2b}{r(1-h)}. \tag{3.4.8}$$

$\forall\varepsilon>0$, 只要 $|t-s|<\dfrac{\varepsilon r^2(1-h^2)}{4(b+ar+a|\lambda_0|)}$, 结合式 (3.4.7) 和式 (3.4.8) 就有

$$\|R_\xi(T_t)-R_\xi(T_s)\|\leqslant\varepsilon\frac{r^2(1-h)^2}{4(b+ar+a|\lambda_0|)}\cdot\frac{2}{r(1-h)}\cdot\frac{2a(r+|\lambda_0|)}{r(1-h)}<\varepsilon.$$

上面关系说明在算子模意义下 $R_\xi(T_s)$ 关于 s 一致连续, 且关于 $\xi\in\Gamma$ 也是一致连续. 由于

$$E^{T_s}(D)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma R_\xi(T_s)\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{aligned}\|E^{T_s}(D)-E^{T_t}(D)\|&\leqslant\left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma R_\xi(T_s)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma R_\xi(T_t)\mathrm{d}\xi\right\|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\|R_\xi(T_s)-R_\xi(T_t)\|\mathrm{d}\xi<r\varepsilon,\end{aligned}$$

因此, $E^{T_s}(D)$ 关于 s 也是一致连续的.

由定理 3.2.9 及其注可知, $\dim E^{T_s}(D)X=\dim E^{T_t}(D)X$, 所以 $\dim E^{T_s}(D)X$ 是常数. □

定理 3.4.1 说明在不等式 (3.4.3) 成立的条件下, 自伴算子 A 在满足一定条件的对称算子 B 的扰动下, A 的特征子空间的维数小于或等于 $A+B$ 的特征子空间的维数, 即

$$\dim\varepsilon^A\leqslant\dim\varepsilon^{A+B}, \tag{3.4.9}$$

其中, ε^A, ε^{A+B} 分别表示算子 A 和 $A+B$ 的特征子空间. 定理也说明自伴算子 A 在满足一定条件的对称算子 B 的扰动下, A 的孤立点谱经过微扰后仍然是离散谱点, 谱点的个数不变, 而且分布在原孤立点谱附近. 如果 $A+B$ 的 m 个点谱不在同一位置, 那么称点谱 λ_0 经微扰后产生了裂变. 能量算子离散谱点的裂变现象是量子力学和原子物理学中的重要现象.

定理 3.4.2 (Weyl 定理) 设 A 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, B 是 X 上的对称算子, 若 B 是 A 紧的算子, 则 $\sigma_e(A+B)=\sigma_e(A)$.

证明 先证 $\sigma_e(A)\subset\sigma_e(A+B)$. 设 $\lambda_0\in\sigma_e(A)$, 由定理 2.5.18 知, 存在对应 λ_0 的 Weyl 序列 $\{x_n\}\subset D(A)$, $\|x_n\|=1$, $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_0I-A)x_n=0$. 由于

$$Ax_n = \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n + Ax_n = \lambda_0 x_n - (\lambda_0 I - A)x_n, \tag{3.4.10}$$

所以, $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = 0$, 即 Ax_n 也收敛于 0. 从而在 $(D(A), [\![\cdot]\!])$ 中 $\{x_n\}$ 也收敛于 0.

又因为 B 是 A 紧的算子, 所以 $\{Bx_n\}$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 中强收敛于 0. 从而

$$\lim_{n\to\infty}((\lambda_0 I - A)x_n - Bx_n) = 0, \tag{3.4.11}$$

即, $\lim\limits_{n\to\infty}((\lambda_0 I - (A+B))x_n = 0$. 这就说明了 $\{x_n\}$ 是算子 $A+B$ 关于 λ_0 的 Weyl 序列. 所以, $\lambda_0 \in \sigma_e(A+B)$.

另外, 由于 B 是 A 紧的, 则 B 也是 $A+B$ 紧的, $-B$ 也是 $A+B$ 紧的. 由上面的证明知, $\sigma_e(A+B) \subset \sigma_e(A+B+(-B)) = \sigma_e(A)$. □

Weyl 定理说明自伴算子 A 在满足一定条件的对称算子 B 的扰动下, 其本质谱是不变的.

3.5 自伴算子的直和分解及双线性型

3.5.1 自伴算子的直和分解

Hilbert 空间 X 可以表示为两个 Hilbert 空间 X_1, X_2 的直和, 即

$$X = X_1 \oplus X_2, \tag{3.5.1}$$

是指对于 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $x_1 \in X_1$ 和 $x_2 \in X_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$. 并且对任意的 $x, y \in X$, 如果 $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, 其中, $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$, 那么

$$(x, y) = (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2, \tag{3.5.2}$$

$$\|x\|^2 = \|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2, \tag{3.5.3}$$

其中, $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_1$ 和 $(\cdot,\cdot)_2$ 分别表示 Hilbert 空间 X, X_1 和 X_2 上的内积, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别表示 X, X_1 和 X_2 上的范数.

定义 3.5.1 设 A_1,A_2 分别是定义在 Hilbert 空间 X_1, X_2 上的自伴算子, 且

$$Au = A_1 u_1 + A_2 u_2, \quad u = u_1 + u_2 \in D(A), \tag{3.5.4}$$

其中 $u_i \in D(A_i)$ $(i = 1, 2)$. 此时称 Hilbert 空间 $D(A) \subset X$ 是 X_1, X_2 空间的直和, 算子 A 是自伴算子 A_1, A_2 的直和, 记为

$$A = A_1 \oplus A_2. \tag{3.5.5}$$

定理 3.5.2　若 A 是自伴算子 A_1, A_2 的直和, 则 $A = A_1 \oplus A_2$ 是 Hilbert 空间 X 上的一个自伴算子, 而且

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2), \tag{3.5.6}$$

$$\sigma_p(A) = \sigma_p(A_1) \cup \sigma_p(A_2) \quad (\sigma_d(A) = \sigma_d(A_1) \cup \sigma_d(A_2)), \tag{3.5.7}$$

$$\sigma_c(A) = \sigma_c(A_1) \cup \sigma_c(A_2) \quad (\sigma_e(A) = \sigma_e(A_1) \cup \sigma_e(A_2)). \tag{3.5.8}$$

证明　不难验证 A 也是自伴算子, 下面证明其他等式.

(1) 证明 $\sigma_p(A) = \sigma_p(A_1) \cup \sigma_p(A_2)$ $(\sigma_d(A) = \sigma_d(A_1) \cup \sigma_d(A_2))$. 对于任意 $\lambda_i \in \sigma_p(A_i)$, $\exists u \in D(A)$, 使得 $A_i u = \lambda_i u$ $(i = 1, 2)$,

$$A(u_1 + 0) = A_1 u + A_2 0 = \lambda_1 u + 0 = \lambda_1(u + 0),$$

$$A(0 + u_2) = A_1 0 + A_2 u = 0 + \lambda_2 u = \lambda_2(0 + u),$$

所以 $\lambda_i \in \sigma_p(A)$ $(i = 1, 2)$.

反之, 如果 $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\exists u_1 \in D(A_1)$, $u_2 \in D(A_2)$ 至少有一个不为零, 使得

$$A(u_1 + u_2) = \lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2,$$

即

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 = \lambda u_1 + \lambda u_2,$$

所以, $\lambda \in \sigma_p(A_1)$ 或 $\lambda \in \sigma_p(A_2)$.

同样可以证明 $\sigma_d(A) = \sigma_d(A_1) \cup \sigma_d(A_2)$.

(2) 对 $i = 1$ 和 2, 设 $\lambda_i \in \sigma_e(A_i)$, $\{u_{ij}\}_{j=1,2,\cdots}$ 是算子 A_i 对应 λ_i 的 Weyl 序列. 则 $\{u_{1j} + 0\}$, $\{0 + u_{2j}\}$ 都是算子 A 对应 λ_i 的 Weyl 序列, 所以 $\lambda_i \in \sigma_e(A)$.

反之, 若 $\lambda \in \sigma_e(A)$, $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 是算子 A 对应 λ 的 Weyl 序列, 且 $u_j = u_{1j} + u_{2j}$, 其中 $u_{1j} \in D(A_1)$, $u_{2j} \in D(A_2)$ $(j = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{u_{1j}\}$ 是算子 A_1 对应 λ 的 Weyl 序列, 或者 $\{u_{2j}\}$ 是算子 A_2 对应 λ 的 Weyl 序列.

由于 $j \to \infty$ 时, $Au_j - \lambda u_j \to 0$, 所以 $A_i u_{ij} - \lambda u_{ij} \to 0$ $(i = 1, 2)$. 若 $\{u_{1j}\}$ 和 $\{u_{2j}\}$ 是非预紧的, 则 u_j 也是非预紧的. □

3.5.2　共轭双线性型

为了研究算子的特性, 常引入二次型 $a[u, v] = (Au, v)$, $u \in D(A)$, 而二次型又可以确定出某些类型的算子. 本小节将引入共轭双线性型及著名的 Kato-Lax-Milgram-Nelson 定理和 Courauts 变差原理.

定义 3.5.3　定义在 X 上的复值泛函 $a[u, v]$ 称为是共轭双线性型, 若 $D(a) \subset X$, 且 $\forall u_i$, $v_i \in D(a)$, α_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$, 满足

(1)

$$a[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v_1] = \alpha_1 a[u_1, v_1] + \alpha_2 a[u_2, v_1]; \tag{3.5.9}$$

(2)

$$a[u_1, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2] = \overline{\beta}_1 a[u_1, v_1] + \overline{\beta_2} a[u_1, v_2]. \tag{3.5.10}$$

若 $a[u,v] = \overline{a[u,v]}$, 则称 a 是对称的. 若存在实数 c 使得 $a[u,u] \geqslant c\|u\|^2$ $(\forall u \in D(a))$, 则称 a 是下半有界的. 若 $\overline{D(a)} = X$, 则称 a 是稠定的. $D(a)$ 中的任何序列 $\{u_n\}$, 若 $u_n \to u$ 时, 对于任意的 $v \in D(a)$ 有

$$a[u_n - u, v] \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.5.11}$$

则称 a 是闭的.

例 3.5.4 若 $P_1(t), P_2(t) \in L^2[a,b]$, 且 $P_1(t) \in C^1[a,b]$, 则

$$a[x,y] = \int_a^b (P_1(t)x'(t)\overline{y}'(t) + P_2(t)x(t)\overline{y}(t))\mathrm{d}t$$

是空间 $L^2[a,b]$ 上的一个共轭双线性型.

定理 3.5.5 设 $a[u,v]$ 是稠定闭对称的下半有界共轭双线性型, 则存在唯一的一个下半有界的自伴算子 A, 使得

(1) $a[u,v] = (Au, v)$, $u \in D(A)$, $v \in D(a)$, $D(A) \subseteq D(a)$;

(2) $D(A)$ 在能量距离$\|\cdot\|_A$ 之下在 $D(a)$ 内稠密;

(3) 对 $\forall v \in D(a)$, 若 $a[u,v] = (w,v)$ 成立, $w \in \overline{X}$, 则 $u \in D(A)$, 且 $Au = w$;

(4) 若 $a[u,v] \geqslant 0$, $\forall u, v \in D(a)$, 则 $D(a) = D(A^{1/2})$, 且

$$a[u,v] = (A^{1/2}u, A^{1/2}v), \quad u, v \in D(a). \tag{3.5.12}$$

证明 定义算子 A', $(A'u, v) = a[u,v]$, $u \in D(A') \subset D(a)$, 则 A' 是对称且下半有界的, A' 具有自伴扩张算子 (或本质自伴的算子)A, 则 A 满足上述定理的结论. □

定理 3.5.6 (Courants 变差原理) 设 $a[u,v]$ 和 $b[u,v]$ 是两个定义在 Hilbert 空间 X 上的稠定闭对称且下半有界的共轭双线性型, 而且 $a[u,v] \geqslant b[u,v]$, $u, v \in D(a) \subset D(b)$, 设 A, B 分别是由 $a[u,v]$, $b[u,v]$ 生成的自伴算子.

(1) 若

$$\sigma_e(B) \cap (-\infty, \lambda) = \varnothing, \quad -\infty < \lambda \leqslant \infty, \tag{3.5.13}$$

则 $\sigma_e(A) \cap (-\infty, \lambda) = \varnothing$;

(2) 若 A 与 B 的第 n 个特征值 $\lambda_n(A)$ 和 $\lambda_n(B)$(按重数记) 均属于 $\sigma_e(B)$, 则

$$\lambda_n(A) \geqslant \lambda_n(B), \quad n=1,2,\cdots. \tag{3.5.14}$$

证明　结论 (1) 显然成立, 只证结论 (2). 不失一般性, 不妨设 $a[u,v]$, $b[u,v]$ 是正定的, 即所生成的算子 A 和 B 也是正定算子. 用 $\{E_\lambda^A\}$ 和 $\{E_\lambda^B\}$ 分别表示算子 A 和 B 的谱族, 则

$$a[u,v] = \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 = \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}(E_\lambda^A u, u), \quad u \in D(a) = D(A^{\frac{1}{2}}),$$

$$b[u,v] = \left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 = \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}(E_\lambda^B u, u), \quad u \in D(b) = D(B^{\frac{1}{2}}).$$

若 $\lambda_n(A) < \lambda_n(B)$, 则 $\exists \lambda'$, 使得

$$\lambda_n(B) < \lambda' < \lambda_{n+1}(B),$$

因而有

$$\dim E_{\lambda'}^B X = n < \dim E_{\lambda'}^A X.$$

令 $E_\lambda^B X = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$, 其中 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是算子 B 的 n 个规范正交的特征向量, 满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

由于 $\dim E_{\lambda'}^A X > n$, 取 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n+1} (\in E_{\lambda'}^A X)$ 为 $n+1$ 个线性独立元素, 令 $\psi_0 \in E_{\lambda'}^A \overline{X}$, 并且是 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n+1}$ 的线性组合, $\psi_0 = \sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i \psi_i$, $\|\psi_0\| = 1$, 使得

$$\psi_0 \perp E_{\lambda'}^B X,$$

即

$$(\psi_0, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{n+1} c_j (\psi_j, \varphi_i) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.5.15}$$

上述方程组 (3.5.15) 中 $n+1$ 个未知数 c_j, 有 n 个方程, 则 $\{c_j\}_{j=1}^{n+1}$ 具有非零解.

又因为 $D(A) \subseteq D(a) \subseteq D(b), \psi_0 \in D(b), \psi_0 \perp E_{\lambda'}^B X$, 所以

$$\begin{aligned} b[\psi_0, \psi_0] &= \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}(E_\lambda^B \psi_0, \psi_0) = \int_0^{\lambda'} \lambda \mathrm{d}(E_\lambda^B \psi_0, \psi_0) + \int_{\lambda'}^\infty \lambda \mathrm{d}(E_{\lambda'}^B \psi_0, \psi_0) \\ &= \int_{\lambda_{n+1}(B)}^\infty \lambda \mathrm{d}(E_\lambda^B \psi_0, \psi_0) \geqslant \lambda_{n+1}(B) \left\|\psi_0\right\|^2 = \lambda_{n+1}(B). \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

另外, $\psi_0 \in E_{\lambda'}^A X$, 即

$$a[\psi_0,\psi_0]=\int_0^{\infty}\lambda \mathrm{d}(E_\lambda^A\psi_0,\psi_0)=\int_0^{\lambda'}\lambda \mathrm{d}(E_\lambda^A\psi_0,\psi_0)\leqslant \lambda'\|\psi_0\|^2=\lambda'. \quad (3.5.17)$$

由式 (3.5.16) 和式 (3.5.17) 有

$$a[\psi_0,\psi_0]\leqslant\lambda'<\lambda_{n+1}(B)\leqslant b[\psi_0,\psi_0],$$

这与 $a[\psi_0,\psi_0]\geqslant b[\psi_0,\psi_0]$ 矛盾. 因此, $\lambda_n(A)\geqslant\lambda_n(B)$. □

定理 3.5.7 (Kato-Lax-Milgram-Nelson) 在 Hilbert 空间 X 上, 设 A 是正定自伴算子, B 是闭对称算子, 满足条件:

(1) $D(B)\supset D(A)$;

(2)

$$|(Bu,u)|\leqslant a(Au,u)+b\|u\|^2,\quad \forall u\in D(A). \quad (3.5.18)$$

其中, $0<a<1, b\in\mathbb{R}$, $V=D(A^{\frac{1}{2}})$. 那么存在唯一的自伴算子 C, 使得 C 对应一个共轭双线性型 $a[u,v]$, 有

$$a[u,v]=(Cu,v),\quad \forall u\in D(C)\subset V,\ v\in V, \quad (3.5.19)$$

$$a[u,v]=((A+B)u,v),\quad \forall u\in D(C),\ v\in V, \quad (3.5.20)$$

而且 $C\geqslant -b$.

证明 引入共轭双线性形式

$$a_1[u,v]=(Au,v)+(Bu,v)+(1+b)(u,v),\quad u,v\in D(A).$$

由条件 (1) 和条件 (2), $a_1(u,v)$ 可连续扩充为 $D(A^{\frac{1}{2}})$ 上一个共轭双线性型, 而且

$$\|v\|^2+(1-a)\left\|A^{1/2}v\right\|^2\leqslant a_1[v,v]\leqslant(1+2b)\|v\|^2+(1+a)\left\|A^{1/2}\right\|^2.$$

这表明 $[\![\cdot]\!]=a_1[v,v]^{1/2}$ 与 $A^{1/2}$ 的图模等价. 因此, $a_1[u,v]$ 是一个闭的二次型, 根据定理 3.5.5, 存在唯一自伴算子 C_1, 使得 $(C_1u,v)=a_1[u,v]$, $\forall u\in D(C_1), v\in V$. 取 $C=C_1-(1+b)I$, 即得 $C_1\geqslant 1$, 从而推出 $C\geqslant -b$. □

关于共轭双线性型, 也可以得到在相关摄动下所生成算子的本质谱不变的结论.

定理 3.5.8 假设 A_0 和 B_0 是两个定义在 Hilbert 空间上的正定算子, $D(A_0)=D(B_0)$, 并且

$$\|u\|^2\leqslant(B_0u,u)\leqslant c(A_0u,u),\quad u\in D(B_0), \quad (3.5.21)$$

其中, c 是正的常数. 用 A 和 B, H_{A_0} 和 H_{B_0} 分别表示算子 A_0 和 B_0 的 Friedrichs 扩张和能量空间, 而且假设 $D(A)\subseteq H_{A_0}$. 对于算子 $S_0=A_0-B_0$, 如果存在一个二次型 $s[u,v]$, 具有如下特性:

(1) 对于任意的 $u \in D(s), u \neq 0, s[u,v] > 0$;

(2) 对于任意的 $u \in D(s)$, 存在 $C > 0$, 使得 $s[u,v] \leqslant C\|u\|_{A_0}^2$;

(3) $|(S_0u,v)| \leqslant s[u,v]$, $\forall u,v \in D(S_0)$,

并且 X 内的有界集 M 在算子 B^{-1} 下的象集 $B^{-1}M$ 在范数 $s^{\frac{1}{2}}[u,u]$ 下是预紧的, 则

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(B). \tag{3.5.22}$$

证明 由条件 (2) 和条件 (3) 可知, S_0 在空间 H_{A_0} 上是有界的, 根据定理 3.5.5 便有在空间 H_{A_0} 上存在一个自伴算子 T, 使得对于 $u \in D(B_0)$, $v \in H_{A_0}$,

$$(S_0u,v) = (AA^{-1}S_0u,v) = [A^{-1}S_0u,v]_{A_0} = [Tu,v]_{A_0},$$

即 $(Au,v) - (Bu,v) = [Tu,v]_{A_0}$,

$$[u,v]_{A_0} - [Bu,v]_{B_0} = [Tu,v]_{A_0},$$

根据定理条件有在范数 $\|\cdot\|_{A_0}$ 下收敛可推出在范数 $\|\cdot\|_{B_0}$ 下收敛, 以及算子 T 和 $s[\cdot,\cdot]$ 是连续的, 所以 $u \in D(B_0)$ 可以扩展到 H_{A_0} 上, 即对于 $u,v \in H_{A_0}$, 等式

$$[u,v]_{A_0} - [Bu,v]_{B_0} = [Tu,v]_{A_0}, \tag{3.5.23}$$

成立.

对于任意的 $h \in H$, 若 $B\varphi = h, A\psi = h$, 则 $\psi \in H_{A_0}$ 且 $\varphi \in D(B) \subseteq H_{A_0}$, $v \in H_B$, 且有

$$[\varphi,v]_{B_0} = (B\varphi,v) = (A\psi,v) = [\psi,v]_{A_0},$$

在式 (3.5.23) 中, 令 $u = \varphi$, 则

$$[\varphi,v]_{A_0} - [\psi,v]_{A_0} = [(B^{-1} - A^{-1})h,v]_{A_0} = [TB^{-1}h,v]_{A_0},$$

因此,

$$TB^{-1}h = (B^{-1} - A^{-1})h, \quad h \in H. \tag{3.5.24}$$

下面只需证明 TB^{-1} 在空间 H 上是一个紧算子, 从而 $B^{-1} - A^{-1}$ 是紧算子, 根据 Weyl 定理得 A^{-1} 与 B^{-1} 具有相同的本质谱, 即 $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$.

若 $u,w \in D(S_0)$,

$$(S_0u,w) + (S_0w,u) = \frac{1}{2}\left[(S_0(u+w),u+w) - (S_0(u-w),u-w)\right],$$

则

$$|(S_0u,w) + (S_0w,u)| \leqslant \frac{1}{2}\left[(S_0(u+w),u+w) - (S_0(u-w),u-w)\right],$$

$$|(S_0u,w)+(S_0w,u)| \leqslant s\,[u,w]+s\,[w,u].$$

假设 $s[u,u]=1$, $s[w,w]=1$, $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}v$, v 满足如下等式

$$(S_0u,v)=|(S_0u,v)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad (Su,v)\neq 0, \tag{3.5.25}$$

所以 $|(S_0u,v)| \leqslant 1$.

如果 $s[u,u]>0$, $s[w,w]>0$, 则有 $|(S_0u,v)|^2 \leqslant s[u,u]\,s[v,v]$. 再由条件 (3) 得

$$|(S_0u,v)|^2 \leqslant s[u,u]\,s[v,v], \quad \forall u\in D(S_0),\ v\in H_{A_0}. \tag{3.5.26}$$

在不等式 (3.5.26) 中令 $v=A^{-1}S_0u$, 由条件 (2) 有

$$(Av,v) \leqslant s[u,u]\,s[v,v] \leqslant C\,s[u,u]\,(Au,v). \tag{3.5.27}$$

又因为 $A^{-1}S_0u=Tu, u\in D(S_0)$, 所以

$$[v,v]_{A_0} \leqslant C\,s[u,u], \quad v=Tu,\ u\in D(S_0).$$

而算子 T 和 $s[\cdot,\cdot]$ 在空间 H_{A_0} 上是连续的, 故有

$$[v,v]_{A_0} \leqslant C\,s[u,u], \quad v=Tu,\ u\in H_{A_0}. \tag{3.5.28}$$

设 M 是空间 X 内的有界集, 根据定理的假设知, $B^{-1}M$ 是预紧的, 则集合 $\{v|v=Tu=TB^{-1}h, h\in M\}$ 是空间 H_{A_0} 内的预紧集, 所以 $TB^{-1}M$ 也是空间 X 内的预紧集, 故 $TB^{-1}=B^{-1}-A^{-1}$ 是紧算子. □

如果 B 是正定的自伴算子, 能量空间 H_B 是集合 $D(B)$ 在范数 $\|u\|_B=(Bu,u)^{\frac{1}{2}}$ 下的完备化, 对应的共轭双线性型为 $b[u,v]=(Bu,v)$, $u,v\in D(B)$. 设 $s[u,v], u,v\in D(s)\supset H_B$ 是一个对称共轭双线性型, 而且在 H_B 内有界, 即 $|s[u,v]|\leqslant C\,\|u\|_B\,\|v\|_B$, $u,v\in H_B$, 则存在一个定义在 H_B 上的有界自伴算子 S 使得

$$s[u,v]=[Su,v]_B, \quad u,v\in H_B. \tag{3.5.29}$$

定义 3.5.9 如果上面所定义有界自伴算子 S 在 H_B 上是紧算子, 称共轭双线性型 $s[u,v]$ 关于共轭双线性型 $b[u,v]$ 是相关紧的.

定理 3.5.10 设共轭双线性型 $s[u,v]$ 关于共轭双线性型 $b[u,v]$ 是相关紧的, 并且

$$a[u,v]=b[u,v]+s[u,v], \tag{3.5.30}$$

则

(1) $a[u,v]$ 是一个下半有界的闭共轭双线性型, 范数 $\|\cdot\|_B$ 与 $a[u,v]$ 所定义的算子下的范数 $\|\cdot\|_A$ 等价;

(2) 共轭双线性型 $a[u,v]$ 和 $b[u,v]$ 所定义的自伴算子 A 和 B 具有的相同的本质谱, 即 $\sigma_e(A)=\sigma_e(B)$.

证明 (1) 设 S 是在空间 H_B 上的紧自伴算子, 且 $s[u,v]=[Su,v]_B$, $u,v\in H_B$, $\alpha_j\,(j=1,2,\cdots)$ 是 S 在空间 H_B 上的特征值, $u_j(x)\,(j=1,2,\cdots)$ 为对应于 α_j 且相互正交的特征向量. 由于 S 在空间 H_B 上是紧算子, 所以 $\alpha_j\to 0\ (j\to\infty)$, 并且对 $\forall u\in H_B$,

$$Su=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j[u,u_j]_Bu_j.$$

对于任意小的 ε, 存在一个数 j_0, 使得当 $j>j_0$ 时, $|\alpha_j|<\varepsilon$, 并且有

$$\|Su\|_B^2\leqslant\varepsilon^2\|u\|_B^2+j_0\|S\|^2\max_{1\leqslant j\leqslant j_0}|[u,u_j]_B|^2.$$

因为 $D(B)$ 在空间 H_B 内稠密, 对于 $\eta>0$, 存在一列 $v_j\in D(B)$, 使得

$$\|u_j-v_j\|_B<\eta,\quad j=1,2,\cdots,j_0,$$

则

$$\begin{aligned}|[u,u_j]_B|^2&=|[u,u_j-v_j]_B+[u,v_j]_B|^2\leqslant 2|[u,u_j-v_j]_B|^2+2|[u,v_j]_B|^2\\&\leqslant 2\eta^2\|u\|_B^2+2\|u\|^2\|Bv_j\|^2.\end{aligned}$$

如果选取充分小的 $\eta>0$, 使得 $2\eta j_0\|S\|_B^2\leqslant\varepsilon^2$, 则结合以上两个不等式得

$$\|Su\|_B^2\leqslant 2\varepsilon^2\|u\|_B^2+C_\varepsilon\|u\|^2,$$

所以

$$\begin{aligned}|s[u,u]|&=|[Su,u]_B|\leqslant\|Su\|_B\,\|u\|_B\leqslant\frac{1}{2\delta^2}\|Su\|_B^2+\frac{\delta^2}{2}\|u\|_B^2\\&\leqslant\frac{1}{2\delta^2}(2\varepsilon^2\|u\|_B^2+C_\varepsilon\|u\|^2)+\frac{\delta^2}{2}\|u\|_B^2\\&\leqslant\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}+\frac{\delta^2}{2}\right)\|u\|_B^2+\frac{C_\varepsilon}{2\delta^2}\|u\|^2.\end{aligned}\tag{3.5.31}$$

取足够小的 ε 和 δ, 使得 $\delta>\varepsilon>0$, 而且 $\beta=\dfrac{\varepsilon^2}{\delta^2}+\dfrac{\delta^2}{2}<\dfrac{1}{2}$, 从而 $\forall u\in H_B$ 有

$$a[u,u]=b[u,u]+s[u,u]\geqslant(1-\beta)\|u\|_B^2-C_\beta\|u\|^2.$$

因此, $a[u,v]$ 是下半有界的. 适当选取充分大的 C, 则 $a[u,v]+C(u,v)$ 是一个正定共轭双线性型. 根据上面最后两个不等式及 Banach 逆定理可以得到在空间 H_B 上

能量范数 $\|u\|_A = (a[u,u] + C\|u\|^2)^{1/2}$ 与能量范数 $\|u\|_B$ 是等价的. 故 $a[u,v]$ 是一个共轭双线性型.

(2) 不失一般性, 假设 $a[u,u]$ 和 $b[u,u]$ 都是正定的, 则逆算子 A^{-1}, B^{-1} 存在, 要证明 $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$, 只要证明 $A^{-1} - B^{-1}$ 是紧算子即可.

$\forall h \in X$, 若有 $Bu = h$, $Av = h$, $u, v \in H_B$, 则对 $\forall g \in H_B$ 有

$$
\begin{aligned}
b[u,g] &= (Bu,g) = (Av,g) = a[v,g] = b[v,g] + s[v,g] \\
&= b[v,g] + [Sv,g]_B = b[v,g] + b[Sv,g] = b[v+Sv,g].
\end{aligned}
$$

因此, $u = v + Sv$, 即 $SA^{-1}h = (B^{-1} - A^{-1})h$. 由于 A^{-1} 是有界算子, S 是紧算子, 所以 $A^{-1} - B^{-1}$ 是紧算子. □

第 4 章　C-对称算子和 C-自伴算子

4.1　引　　言

算子的谱理论和谱分析是算子理论的重要研究内容, 也是现代数学的基础理论. Hilbert 空间中的有界对称算子理论, 以及无界对称算子的理论已有完备的理论体系, 并已将这些理论成果很好地应用到了其他分支, 如微分方程和积分方程等理论, 很好地解决了现代数学与现代物理学中的许多重要问题. 我们也经常碰到一些非对称问题, 最典型的就是 J-自伴微分算子.

常微分算子谱理论主要研究自伴和非自伴微分算子的谱及其特征状态, 也就是研究线性微分算式分别赋予线性边条件后所生成的算子的谱及其特征状态.

当微分算式是对称算式时, 赋予适当的线性边条件可以生成对称微分算子和自伴微分算子, 那么, 研究这类边值问题就归结为研究对称和自伴微分算子的谱及其特征. 许多线性微分方程边值问题也可转化为常微分算子理论的研究. 从而, 产生了经典常微分算子理论研究的几个领域: 自伴域 (对称扩张) 的描述, 对称微分算子亏指数理论, 微分算子的谱理论.

在研究线性微分方程边值问题时, 人们碰到大量的非自伴和非对称问题, 如对称微分算式赋予非对称和非自伴的线性边条件所产生的算子问题, 或者非对称微分算式赋予适当的线性边条件所产生的算子问题. 不论是哪种情形, 都没有类似自伴算子的完善理论框架来应用到这些算子上. 对于对称微分算式赋予非对称和非自伴的线性边条件所产生的特殊算子, 第 6 章将研究几类特殊情形. 而非对称微分方程赋予适当的线性边条件所产生问题非常广泛, 但我们发现了一类 “类似” 对称和自伴的微分边值问题, 即 J-对称和 J-自伴 (复对称和复自伴或称为 C-对称和 C-自伴) 微分边值问题. 针对这类型微分边值问题所生成的 J-对称和 J-自伴微分算子, 也有对应的 J-自伴域 (J-对称扩张) 的描述、亏指数理论和谱理论.

经典常微分算子理论采用算子方法和分析方法相结合的手段进行研究, 算子方法是建立在完善的对称算子扩张理论和自伴算子谱理论的基础上. 研究 J-对称和 J-自伴微分算子也需要相应的 J-对称算子的扩张理论和 J-自伴算子谱理论. 在此前提下, 人们自然要研究更一般的且具有类似性质的算子的特性.

本章重点研究非对称算子中的和对称算子在某些方面具有类似特点的一类算子 C-对称算子和 C-自伴算子, 这类算子在实际问题中存在, 如复对称问题 (复对

称矩阵) 生成的算子, 以及 Normal 算子、Hankel 算子、压缩 Toeplitz 算子、某些类型的 Volterra 算子等, 这些算子都是非对称的, 但具有 C-对称性. 通过对这类算子的研究, 给出 C-对称、C-自伴算子的一些基本结论, 以便具体地对 J-自伴微分算子的谱进行定性分析.

4.2 有界 C-对称算子

4.2.1 C-算子

定义 4.2.1 设 X 是可分的 Hilbert 空间, $(\cdot,\cdot)$ 表示 X 上的内积, C 是定义在 X 上的算子, 如果对于任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 以及任意的 $x,y\in X$,

$$C(\alpha x+\beta y)=\overline{\alpha}x+\overline{\beta}y, \tag{4.2.1}$$

则称 C 是定义在 X 上的反 (或半) 线性算子 (antilinear operator); 若 $C^2=I$, 则称 C 是幂等的 (或对合的)(involutive); 若 $\forall x,y\in X$, $(x,y)=(Cy,Cx)$, 则 C 是等距的 (或等度的) (isometric). Hilbert 空间 X 上的一个幂等的等距半线性算子称为一个 C-算子(conjugation operator).

例 4.2.2 在 $\mathbb{C}^n$ 空间中, 算子 C: $\forall z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in C^n$,

$$Cz=C(z_1,\cdots,z_n)=(\overline{z_n},\cdots,\overline{z_1}),$$

则算子 C 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个 C-算子.

例 4.2.3 在复 $L^2[a,b]$ 中, 定义算子 J:

$$Jf(x)=\overline{f(x)},$$

则算子 J 是 $L^2[a,b]$ 上的一个 C-算子.

引理 4.2.4 若 C 是 Hilbert 空间 X 上的一个 C-算子, 则存在一组正交基 $\{e_n\}$, 使得 $Ce_n=e_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, 且任意的 $h\in X$ 都能表示成

$$h=h_1+\mathrm{i}h_2, \tag{4.2.2}$$

其中, $Ch_1=h_1$, $Ch_2=h_2$, 而且

$$\|h\|^2=\|h_1\|^2+\|h_2\|^2. \tag{4.2.3}$$

证明 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 的子空间 $(I+C)X$ 的一组正交基, 对于任意的 $h\in(I+C)X$, 存在 $y\in X$, 使得 $(I+C)y=h$, 则 $Ch=C(I+C)y=(C+I)y=h$.

所以 $Ce_n = e_n$ ($n \in \mathbb{N}$). 从而 $(I+C)X$ 中任何向量可表示为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ 的形式, 其中 $\{a_n\}$ 是平方可积实序列, 即 $(a_0, a_1, a_2, \cdots) \in l^2$. 而

$$h = \frac{1}{2}(I+C)h + \mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}}(I-C)h = \frac{1}{2}(I+C)h + \mathrm{i}\frac{1}{2}(I+C)(-\mathrm{i}h), \tag{4.2.4}$$

由式 (4.2.4) 可知, 任何 $h \in X$, h 均在 $(I+C)X$ 中, 故由式 (4.2.4) 的分解, 以及 C 的性质 $C^2 = I$, 得式 (4.2.2) 和式 (4.2.3). □

为了便于研究引入双线性型 $[\cdot,\cdot]$. 若 C 是 X 上的 C-算子, 对于 $\forall f, g \in X$, 定义对称双线性型

$$[f, g] = (f, Cg), \tag{4.2.5}$$

则对称双线性型 $[\cdot,\cdot]$ 是非退化的而且是等度的, 即 $\forall f \in X$,

$$\sup_{\|g\|=1} |[f, g]| = \|f\|. \tag{4.2.6}$$

反之, 根据 Riesz 表示定理, 若 X 上存在一个非退化等度的对称的双线性型 $[\cdot,\cdot]$, 则一定存在一个算子 C, 使得式 (4.2.5) 成立. 因为 $\|Cf\| = \|f\|$, 所以

$$(f, f) = (Cf, Cf) = [Cf, f] = [f, Cf] = (f, C^2 f), \tag{4.2.7}$$

从而 $C^2 = I$, 因此 C 是一个 C-算子.

4.2.2 有界 C-对称算子性质

设 X 是可分的复的 Hilbert 空间, T 是定义在 X 上的有界线性算子, $T \in B(X)$, C 是 X 上的 C-算子.

定义 4.2.5 称有界线性算子 $T \in B(X)$ 是 C-对称的, 若 $CT \subset T^*C$, 其中 T^* 是算子 T 的共轭算子. 称 (X, T, C) 为 C-对称三元集. 令 $C^0(T) = \{T \in B(X) \mid CT = T^*C\}$, 由 $C^0(T)$ 的定义可知, $C^0(T) \subset B(X)$, 并且是 $B(X)$ 的可闭线性流形.

命题 4.2.6 设 (X, T, C) 为 C-对称三元集,

(1) 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 也是 C-对称的;

(2) Ker$T$ 是空集当且仅当 Ran$T$ 在 X 中稠密;

(3) 若 T 是 Fredholm 算子, 则 Ind$T = 0$;

(4) 对于任何多项式 $p(z)$, $p(T)$ 是 C-对称;

(5) $\forall \lambda$, $n \geqslant 0$, C 在 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^n$ 与 $\mathrm{Ker}(T^*-\overline{\lambda} I)^n$ 之间建立一个半线性等距同构映射.

根据上述命题可以得到 C-对称算子 T 和 T^* 谱的特性, 由于 C 是等距同构, 所以, $\overline{\sigma_p(T)} = \sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$, 其他特性类似. 下面介绍几个 C-对称算子的例子.

例 4.2.7 在 $\mathbb{C}^n$ 空间中, 考虑有限 Jordan 块, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 上的有界线性算子, 令 $C_n \in B(\mathbb{C}^n)$, $\forall z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$C_n z = C_n(z_1, \cdots, z_n) = (\overline{z_n}, \cdots, \overline{z_1}), \tag{4.2.9}$$

则 C_n 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个 C-算子, 容易验证 $J_n(\lambda)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的 C_n-对称算子.

例 4.2.8 在 $\mathbb{C}^2$ 中, 矩阵 $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(\mathbb{C}^2)$, 令

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}, \tag{4.2.10}$$

则 C 是 $\mathbb{C}^2$ 中的 C-算子, 且 T 是 C-对称的.

例 4.2.9 在 $\mathbb{C}^n$ 中, 设 T 是 $n \times n$ 阶复对称矩阵, $T \in B(\mathbb{C}^n)$, 算子 C 是取复共轭运算, 即 $\forall z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $Cz = Jz = \overline{z} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_n})$, 则 $C = J$ 是一个 C-算子, 并且 T 是 J-对称算子, 即

$$JT = T^* J. \tag{4.2.11}$$

如果 (X, T, C) 为 C-对称三元集, $\{e_n\}$ 是在 Hilbert 空间 X 上满足引理 4.2.3 的 C 不变规范正交基: $Ce_n = e_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, 则在基 $\{e_n\}$ 下, C-对称算子 T 是复对称的, 对于任意的 $m, n \in \mathbb{N}$, $(Te_n, e_m) = (Te_m, e_n)$. 事实上, 根据 C-对称算子 T 的性质有

$$(Te_n, e_m) = (Ce_m, CTe_n) = (e_m, T^*Ce_n) = (Te_m, Ce_n) = (Te_m, e_n).$$

由此有下面结论.

命题 4.2.10　设 T 是 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子, 则下列命题等价:

(1) T 关于等距半线性幂等算子C 是 C-对称的;

(2) 在 X 上存在一个等距对称双线性型$[f,g]$, 使得 T 在双线性型下是对称的, 即 $\forall f,g\in X$, $[Tf,g]=[f,T^*g]$;

(3) 存在 X 的一组正交基 $\{e_n\}$, 在此基下 T 可表示成一个对称矩阵.

例 4.2.11　由于每个 Hankel 矩阵是复对称的, 所以 Hankel 算子是 C-对称的. Carleman 算子

$$(\Gamma f)(x)=\int_0^{\infty}\frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y,\quad \forall f\in L^2(0,\infty) \tag{4.2.12}$$

是一个 C-对称算子, 因为算子 Γ 可以在某个正交基下表示为一个复对称矩阵.

例 4.2.12　在 $\mathbb{C}^3$ 中, $J_3(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 是 C-对称的, 其中,

$$C(z_1,z_2,z_3)=(\bar{z}_3,\bar{z}_2,\bar{z}_1), \tag{4.2.13}$$

事实上, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i},0,-\mathrm{i})$, $e_3=(0,1,0)$ 是 $\mathbb{C}^3$ 中的正交基, 于是 $J_3(\lambda)$ 在基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下对应矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \lambda & \dfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \lambda\end{pmatrix} \tag{4.2.14}$$

是一个复对称矩阵.

定理 4.2.13　设 $T=T^{\mathrm{t}}$ 是空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一个对称矩阵, 并且是一个 C-对称算子, 则存在一个酉矩阵 U 和一个正规对称矩阵 N, 使得 (在同一个基下)

$$T=UNU^{\mathrm{t}}. \tag{4.2.15}$$

证明　由于 T 是一个对称矩阵, 且是 C-对称算子, 所以 $T\overline{T}=TT^*$ 是一个实对称矩阵, 因而必存在一个酉矩阵 U 和一个实对称矩阵 S, 使得 $T\overline{T}=USU^*$, $\overline{T}T=\overline{U}SU^{\mathrm{t}}$. 令 $N=U^*T\overline{U}$, 则 N 是正规的 $(N^*N=NN^*=S)$, 对称的 $(N=N^{\mathrm{t}})$, 所以 $T=UNU^{\mathrm{t}}$. □

定理 4.2.14　若 T 是一个 C-对称算子, 则半线性算子 CT 与 T^*T 的谱测度可交换, 也就是若 T^*T 的谱族记为 $E=E_{T^*T}$, 则对于 $[0,\infty)$ 上的任何 Borel 集 σ 有

$$CTE(\sigma) = E(\sigma)CT. \tag{4.2.16}$$

证明 由于 $(CT)^2 = T^*T$, 所以 CT 与 T^*T 可交换, 从而 CT 与所有 $p(T^*T)$ 可交换, 其中, $p(x)$ 是实多项式. 故 CT 与 T^*T 的谱测度可交换. □

命题 4.2.15 设 (X,T,C) 是一个 C-对称三元集. 则

(1) M 是 C 不变子空间当且仅当 $M^{\perp}$ 是 C 不变子空间;

(2) 若 M 是在 C 和 T 下的不变子空间, 则 M 约化算子 T;

(3) M 约化算子 T 当且仅当 CM 约化 T;

(4) 若 M 是 C 不变子空间,P 是 M 上的投影算子, 则 T 的压缩 $A = PTP$ 在 M 上满足 $CA = A^*C$.

4.2.3 C-对称算子的结构

关于 C-算子, 我们引入一个著名的定理.

定理 4.2.16(Godič-Lucenko) 若 U 是 Hilbert 空间 X 上的酉算子, 则在 X 上存在 C-算子 C 和 J, 使得

$$U = CJ. \tag{4.2.17}$$

证明 如果 C 是 Hilbert 空间 X 上的 C-算子, 使得 $CU = U^*C$, 则令 $J = CU$. 容易验证 J 也是 Hilbert 空间 X 上的 C-算子, 所以式 (4.2.17) 成立. 如果 J 是 Hilbert 空间 X 上的 C-算子, 则令 $C = UJ$, 容易验证 C 也是 Hilbert 空间 X 上的 C-算子, 所以式 (4.2.17) 也成立. 定理得证. □

上述结论表示任何一个酉算子都可表示为两个半线性算子的积, 给出了 C-算子和酉算子之间的联系, 使得对 C-算子和酉算子有了进一步的认识, 而且上述结论的逆也成立.

定理 4.2.17 若 C 和 J 是 Hilbert 空间上的两个 C-算子, 则 $U = CJ$ 是一个酉算子, 而且 U 也是 C 对称的和 J 对称的.

证明 若 $U = CJ$, C 和 J 是 X 上的 C-算子, 则 $\forall f, g \in X$,

$$(f, U^*g) = (Uf, g) = (CJf, g) = (Cg, Jf) = (f, JCg),$$

所以 $U^* = JC$, 从而 $CU = U^*C, JU = U^*J$. □

对于 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子 T, 也用 $K(T) = \mathrm{Ker}T$ 表示算子 T 的零子空间, 即方程 $T\phi = 0$ 的所有解所形成的子空间; 用 $R(T)$ 表示算子 T 的值域, 则

$$X = \overline{R(T)} \oplus \mathrm{Ker}(T^*) = \overline{R(T^*)} \oplus \mathrm{Ker}(T). \tag{4.2.18}$$

如果 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子 U 将子空间 $X\backslash K(U)$ 等距地映射到 $R(U)$ 上, 则称有界线性算子 U 为等距算子 (partially isometric). 容易证明, 如果有界线性算子 U 是等距算子, 则 U^* 也是等距算子; 并且, 有界线性算子 U 是从 $R(U^*)$ 到 $R(U)$ 上的等距映射, 有界线性算子 U^* 是从 $R(U)$ 到 $R(U^*)$ 上的等距映射, 而且

$$U^*U = P, \quad UU^* = Q \tag{4.2.19}$$

是两个定义在 Hilbert 空间 X 上的正交投影算子, 将 X 分别投影到 $R(U^*)$ 和 $R(U)$ 上.

设 T 是 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子, 则 T^*T 是一个非负的对称有界线性算子, 且存在一个非负的对称有界线性算子 B, 使得 $\forall x \in X$,

$$(T^*Tx, x) = (B^2x, x), \tag{4.2.20}$$

称线性算子 B 为算子 T 的模算子, 记为 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, 则 $|T|$ 也是一个非负的对称有界线性算子, 而且, 对于任意的 $x \in X$ 有

$$(Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (x, T^*Tx) = (|T|x, |T|x), \tag{4.2.21}$$

$$\overline{R(|T|)} = \overline{R(|T|^2)} = \overline{R(T^*T)} = \overline{R(T^*)}. \tag{4.2.22}$$

在 Hilbert 空间 X 上定义有界线性算子 U: $|T|x \to Tx$,

$$(U|T|x, U|T|y) = (Tx, Ty) = (T^*Tx, y) = (|T|^2 x, y) = (|T|x, |T|y), \tag{4.2.23}$$

则算子 U 是从 $R(|T|)$ 到 $R(T)$ 上的等距算子. 将算子 U 连续延拓到 $\overline{R(|T|)}$ 上, 并且令 $U\phi = 0$, 当 $\phi \in \mathrm{Ker}(|T|)$ 时, 则得到一个在 Hilbert 空间 X 上的等距算子, 并且满足

$$\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}U = \mathrm{Ker}\,|T|, \tag{4.2.24}$$

而且 $U : (\mathrm{Ker}\,|T|)^\perp \mapsto \overline{R(T)}$ 是在上的. 所以, Hilbert 空间 X 上的每个有界线性算子 T 可以唯一地表示为

$$T = U\,|T|, \tag{4.2.25}$$

其中, $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, U 是 Hilbert 空间 X 上的映 $R(|T|)$ 到 $R(T)$ 上的等距算子, 称式 (4.2.25) 为有界线性算子 T 的极表示 (极分解)(polar representation, polar decomposition). 容易验证算子 T 的极分解具有如下特性:

(1) $|T| = U^*T$;

(2) $(TT^*)^{\frac{1}{2}} = U|T|U^*,\ |T| = U^*(TT^*)^{\frac{1}{2}}U$;

(3) $T = (TT^*)^{\frac{1}{2}}U,\ (TT^*)^{\frac{1}{2}} = TU^*$.

若 T 是 C-对称算子, 则可以证明同构算子 U 也是 C-对称的, 若 U 可以表示成两个 C-算子 C, J 的积 $U = CJ$, 则 J 与 $|T|$ 可交换. 特别当 T 是酉算子时, 利用定理 4.2.16, 算子 T 可分解为两个 C-算子的积.

定理 4.2.18 若 $T = U|T|$ 是 C-对称算子的极分解, 则等距算子 U 是 C-对称的且可以分解为 $U = CJ$, 即

$$T = CJ|T|, \tag{4.2.26}$$

其中 J 是在 $R(|T|)$ 上的 C-算子, 并且与 $|T|$ 可交换.

证明 记 T 的极分解为 $T = U|T|$, 而 T 又是 C-对称算子, 因为 U^*U 是 $\overline{R(|T|)}$ 上的投影算子, U 等距, 所以

$$T = CT^*C = C|T|U^*C = C(U^*U)|T|U^*C = (CU^*C)(CU|T|U^*C). \tag{4.2.27}$$

令 $W = CU^*C,\ W^* = CUC$, 而 $U^*UU^* = U^*$, 则 $WW^*W = W$. 所以 W 是一个等距算子. 又 $A = CU|T|U^*C$ 是一个非负的对称算子, 所以若能证明 $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}W = \mathrm{Ker}T$, 则根据极分解的唯一性可得, $W = U,\ A = |T|$.

因为 U 是由 $\overline{R(|T|)}$ 到 $\overline{R(T)}$ 上的算子, 所以

$$\mathrm{Ker}W = \mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}U^*C.$$

下证 $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}U^*C$, 由式 (4.2.27) 得

$$\mathrm{Ker}U^*C \subseteq \mathrm{Ker}T. \tag{4.2.28}$$

反之若 $Tf = 0$, 则 $CT^*Cf = C|T|U^*Cf = 0$, 从而,

$$|T|U^*Cf = 0,$$

由于 U^* 的值域空间为 $\overline{R(|T|)}$, 所以 $U^*Cf = 0$.

综合上述, $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}U^*C$. 从而证明了 $U = W,\ A = |T|$. 等式 $U = W,\ U = CU^*C$ 说明了 U 是 C-对称的. 由于 $J = CU = U^*C$, 所以, $J^2 = (U^*C)(CU) = U^*U$ 是 $\overline{R(|T|)}$ 上的正交投影, 而且 $|T| = A$, $CU|T|U^*C = |T|$, 即

$$J|T|J = |T|,$$

故 $J|T| = |T|J$.

根据 $J = CU$, 得 $\mathrm{Ker}J = \mathrm{Ker}U = \mathrm{Ker}\,|T| = (\overline{R(|T|)})^{\perp}$; 又由 $J = U^*C$ 得, $R(J) = R(U^*) = \overline{R(|T|)}$, 由于 CU 是等距的, 所以 T 也是一个在 $\overline{R(|T|)}$ 上的等距算子, 这就证明了 J 是一个在 $\overline{R(|T|)}$ 上与 $|T|$ 可交换的 C-算子. □

推论 4.2.19 若 T 是 C-对称算子, 则 $T = W\,|T|$, 其中 W 是一个 C-对称的酉算子.

推论 4.2.20 若 T 是 C-对称算子, 则 T 可逆的充要条件是 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 可逆.

推论 4.2.21 若 T 是 C-对称算子, 则 T^*T 和 TT^* 是酉等价的.

证明 若 T 是 C-对称算子, $T = CJ\,|T|$, 不失一般性, 可以设 J 是 X 上的 C-算子, 则由于 J 与 $|T|$ 可交换, 与 $|T|^2$ 可交换, $T^2 = T^*T$, 故

$$CJ(T^*T) = CT^*TJ = CT^*CCTJ = TCTJ = TCTCCJ = TT^*CJ,$$

而 CJ 是酉算子, 所以 T^*T 和 TT^* 是酉等价的. □

推论 4.2.21 的逆命题不一定成立.

定理 4.2.22 在 Hilbert 空间 X 上, 每个紧 C-对称算子 T 均可表示为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\cdot, e_n)Ce_n, \tag{4.2.29}$$

其中, $\{\lambda_n\}$ 是 $|T|$ 的特征值 (按重数计), $\{e_n\}$ 是 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 的一组规范的正交特征向量.

证明 T 是紧算子, 则 $|T|$ 也是紧的非负对称算子, $\{\lambda_n\}$ 是 $|T|$ 的特征值, ε_n 是 λ_n 对应的特征子空间, $\dim\varepsilon_n < \infty$, $0 \leqslant n < N$. 若 T 是有限算子, 则 $N < \infty$, 否则 $N = \infty$, $\lambda_n \to 0$. 根据定理 4.2.18 知 $CT = J\,|T|$, J 是定义在 $\overline{R(|T|)}$ 上的与 $|T|$ 可交换的 C-算子, J 在 ε_n 也是一个 C-算子, 所以, ε_n 中存在一组正交基 $u_{n,1}, u_{n,2}, \cdots, u_{n,d_n}$, 对于 J 而言, 使得

$$CTu_{n,k} = \lambda_n u_{n,k}, \quad k = 1, 2, \cdots, d_n,$$

由于 $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}\,|T|$, 所以

$$T - \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n \sum_{k=1}^{d_n} (\cdot, u_{n,k})Cu_{n,k}. \tag{4.2.30}$$

在 $(\mathrm{Ker}T)^{\perp} = \overline{R(T)}$ 上恒等于 0. 由于 $\lambda_n \to 0$, 所以式 (4.2.30) 是收敛的. 或者由紧对称算子的谱分解定理也可立得式 (4.2.29). □

$|T|$ 的非零特征值 $\{\lambda_n\}$ 称为算子 T 的奇异值(singular value), 对应的特征向量 $\{e_n\}$ 称为算子 T 的奇异特征向量 (singular eigenvector).

推论 4.2.23 若 T 是 X 上的一个紧的 C-对称算子, 则

$$\|T\| = \sup\{\sigma \geqslant 0 \mid \exists f(f \neq 0),\ 使得 Tf = \sigma Cf\}. \tag{4.2.31}$$

定理 4.2.24(AAK (Adaman, Aror, Krein)) 若 T 是一个紧的 Hankel 算子, 则它的奇异值 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$ 满足

$$\sigma_n = \inf_{\operatorname{rank} T' = n} \|T - T'\|, \tag{4.2.32}$$

其中 T' 是一个有限秩的 Hankel 算子.

对于 C-对称算子有类似的结论.

定理 4.2.25 若 T 是一个定义在 X 上的紧 C-对称算子, T 的奇异值 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$, 重根按重数计算, 则

$$\sigma_n = \inf_{\operatorname{rank} T' = n} \|T - T'\|, \tag{4.2.33}$$

其中 T' 是一个有限秩的 C-对称算子.

证明 由于 T 是 C-对称算子, 则 $T = CJ|T|$, 由定理 4.2.22 可得, $|T| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_k(\cdot, e_k)e_k$, $Je_k = e_k$ $(\forall k)$. 设 $A_0 = 0,\ A_1 = \sigma_0(\cdot, e_0)e_0,\ \cdots,\ A_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\cdot, e_k)e_k$, 记 $T' = CJA_n$, 则

$$\|T - T'\| = \|CJ|T| - CJA_n\| = \|CJ(|T| - A_n)\| = \||T| - A_n\| \geqslant \sigma_n.$$

而 $\operatorname{rank} T' = n$, T 与 A_n 可交换, T' 是 C-对称的, 所以, 由以上可得式 (4.2.33). □

4.2.4 C-对称算子的变差原理

X 是复的可分 Hilbert 空间, $(\cdot, \cdot)$ 是 X 上的内积, C 是定义在 X 上的一个 C-算子, $\forall x, y \in X$,

$$(x, y) = (Cy, Cx). \tag{4.2.34}$$

用 $[\cdot, \cdot]$ 表示如下的双线性型

$$[x, y] = (x, Cy). \tag{4.2.35}$$

在此双线性型下, X 上的 C-对称算子 T, 关于 $[\cdot, \cdot]$ 成为对称算子, 即

$$[Tx, y] = (Tx, Cy) = (x, T^*Cy) = (x, CTy) = [x, Ty].$$

上式也可以作为 C-对称算子 T 的等价定义.

定理 4.2.26 假若 $B: X \times X \to \mathbb{C}$ 是一个有界双线性型, 则存在唯一的一个有界算子 $T: X \to X$, 使得 $\forall x, y \in X$,

$$B(x,y) = [Tx, y], \tag{4.2.36}$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 是由式 (4.2.35) 所定义. 若 B 是对称的双线性型, 则 T 是 C-对称算子; 反之亦然, 即一个有界 C-对称算子 T 与一个对称的双线性型对应.

证明 若 B 是定义在 $X \times X$ 上的一个有界双线性型, 则

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto B(x, Cy)$$

定义了一个有界共轭双线性型, 根据定理 3.5.5, 存在一个线性算子 $T: X \to X$, 使得 $\forall x, y \in X$,

$$B(x, Cy) = (Tx, y),$$

从而

$$B(x,y) = (Tx, Cy) = [Tx, y].$$

若 $B(x,y) = B(y,x)$, 则 $\forall x, y \in X$ 有

$$(Tx, Cy) = (Ty, Cx),$$

即

$$(x, T^*Cy) = (x, CTy),$$

所以 T 是 C-对称算子.

反之, 若 T 是 C-对称算子, 则

$$B(x,y) = [Tx, y] = [x, Ty] \tag{4.2.37}$$

是对称双线性型, 而且是有界的.

由上面定义可知

$$B(x,y) = [Tx, y] = (Tx, Cy) = (x, T^*Cy),$$

$$B(x,y) = [x, Ty] = (x, CTy).$$

当 B 是对称双线性型时, $(x, T^*Cy) = B(x,y) = (y, CTx)$, 所以

$$(T^*C)(CT) = T^*T = |T|^2. \tag{4.2.38}$$

□

定义 4.2.27 若算子 T 的模算子 $|T|$ 是紧的, 则称 $B(x,y)$ 是紧的; 若 $B(x,y)$ 是一个紧的双线性型, 则 $|T|$ 的特征值称为双线性型 $B(x,y)$ 的奇异值.

设 A 是 X 上的对称紧算子, 根据对称紧算子谱的特性可知, 若 $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$ 是 A 的特征值 (重根按重数计算), 则

$$\lambda_n = \min_{\operatorname{co}\dim V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \{Ax, x\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant \dim X. \tag{4.2.39}$$

定理 4.2.28 若 T 是 X 上的一个紧的 C-对称算子, $\sigma_0 \geqslant \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant \cdots \geqslant 0$ 是 T 的一组奇异值, 则

$$v_n = \min_{\operatorname{co}\dim V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \Re[Tx, x] = \begin{cases} \sigma_{2n}, & 0 \leqslant n \leqslant \dfrac{\dim X}{2}, \\ 0, & n > \dfrac{\dim X}{2}. \end{cases} \tag{4.2.40}$$

证明 设 $\{e_n\} \subset X$ 是 X 中满足定理 4.2.22 条件的一组规范正交基, 即

$$|T|\, e_n = \sigma_n e_n, \quad Je_n = e_n,$$

其中 J 是 T 的极分解 $(T = CJ|T|)$ 中的一个 C-算子.

第一步: 证明 $v_n \geqslant \sigma_{2n}$.

设 V 是 X 中一个满足 $\operatorname{co}\dim V = n \left(0 \leqslant n < \dfrac{\dim X}{2}\right)$ 的子空间, 则 $\dim V^{\perp} = n$, $\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = 2n$, 令

$$W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, e_1, \cdots, e_{2n}\},$$

表示 $\{e_0, e_1, \cdots, e_{2n}\}$ 实的线性包, 则 e_j 具有如下分解

$$e_j = u_j + v_j, \quad u_j \in V,\ v_j \in V^{\perp},\ j = 0, 1, 2, \cdots, 2n.$$

又因为 $\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = 2n$, 则 $2n+1$ 个向量 $v_0, v_1, \cdots, v_{2n} \in v^{\perp}$, 存在一组不全为零的常数 $a_0, a_1, \cdots, a_{2n}$, 使得

$$a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots a_{2n} v_{2n} = 0. \tag{4.2.41}$$

又由于 $e_0, e_1, \cdots, e_{2n}$ 相互正交, 所以

$$f = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_{2n} u_{2n} = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_{2n} e_{2n} \neq 0,$$

而且 $f \in W \cap V$. 对 f 规范化, 不妨设 f 是一个单位向量, 则

$$
\begin{aligned}
[Tf, f] &= (Tf, Cf) = (CJ|T|f, Cf) = (f, J|T|f) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{2n} a_j e_j, J|T|\sum_{j=0}^{2n} a_j e_j\right) = \left(\sum_{j=0}^{2n} a_j e_j, J\sum_{j=0}^{2n} a_j \sigma_j e_j\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{2n} a_j e_j, \sum_{j=0}^{2n} \sigma_j \overline{a_j} e_j\right) = \sum_{j=0}^{2n} \sigma_j |a_j|^2 \geqslant \sigma_{2n}.
\end{aligned}
$$

这是由于 $\|f\| = 1$, 所以 $\sum_{j=0}^{2n} a_j^2 = 1$, 而且 $\sigma_0 \geqslant \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{2n} > 0$.

对任意 $V \subset X$, 若 $\operatorname{co}\dim V = n$, 则

$$
\max_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \Re[Tx, x] \geqslant \sigma_{2n},
$$

从而

$$
v_n = \min_{\operatorname{co}\dim V = n} \max_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \Re[Tx, x] \geqslant \sigma_{2n}. \tag{4.2.42}
$$

第二步: 证明当 $0 \leqslant n < \dfrac{\dim X}{2}$ 时, $v_n \leqslant \sigma_{2n}$; 其他情形, $v_n = 0$.

对于 $j = 0, 1, \cdots, n-1$, 定义相互正交的向量组,

$$
w_j = \begin{cases} \sqrt{\sigma_{2j+1}} e_{2j} + \mathrm{i}\sqrt{\sigma_{2j}} e_{2j+1}, & \sigma_{2j+1} > 0, \\ e_{2j+1}, & \sigma_{2j+1} = 0, \end{cases} \tag{4.2.43}
$$

考虑线性子空间

$$
V' = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}, e_{2n}, e_{2n+1}, \cdots\}.
$$

显然, $\operatorname{co}\dim_{\mathbb{C}} V' = n$, 设

$$
g = b_0 w_0 + \cdots + b_{n-1} w_{n-1} + c_0 e_{2n} + c_1 e_{2n+1} + \cdots,
$$

$$
g_0 = b_0 w_0 + \cdots + b_{n-1} w_{n-1}, \quad g_1 = c_0 e_{2n} + c_1 e_{2n+1} + \cdots,
$$

且 $\|g\| = 1$, 则

$$
Jg = \overline{b_0} J w_0 + \cdots + \overline{b_{n-1}} J w_{n-1} + \overline{c_0} e_{2n} + \overline{c_1} e_{2n+1} + \cdots = Jg_0 + Jg_1.
$$

由 w_j 的定义可知

$$(g_0, |T|\, Jg_1) = (g_1, |T|\, Jg_0) = 0, \tag{4.2.44}$$

所以

$$\begin{aligned}[Tg,g] &= (Tg,Cg) = (g,CTg) = (g,J\,|T|\,g)\\ &= (g,|T|\,Jg) = (g,|T|\,Jg_0) + (g_0,|T|\,Jg_1) + (g_1,|T|\,Jg_0) + (g_1,|T|\,Jg_1)\\ &= (g,|T|\,Jg) = (g_0,|T|\,Jg_0) + (g_1,|T|\,Jg_1).\end{aligned}$$

再根据 w_j 的定义可得

$$(w_j, |T|\, Jw_k) = 0, \quad j = 0,1,2,\cdots,n-1,\ j \neq k,$$

而

$$\begin{aligned}(w_j,|T|\,Jw_j) &= (\sqrt{\sigma_{2j+1}}e_{2j} + \mathrm{i}\sqrt{\sigma_{2j}}e_{2j+1}, |T|\,(\sqrt{\sigma_{2j+1}}e_{2j} - \mathrm{i}\sqrt{\sigma_{2j}}e_{2j+1}))\\ &= (\sqrt{\sigma_{2j+1}}e_{2j} + \mathrm{i}\sqrt{\sigma_{2j}}e_{2j+1}, \sqrt{\sigma_{2j+1}}\sigma_{2j}e_{2j} - \mathrm{i}\sqrt{\sigma_{2j}}\sigma_{2j+1}e_{2j+1})\\ &= \sigma_{2j}\sigma_{2j+1}(e_{2j},e_{2j}) - \sigma_{2j}\sigma_{2j+1}(e_{2j+1},e_{2j+1}) = 0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\Re[Tg,g] &\leqslant |\ [Tg,g]\ | = |\ (g_1,|T|Jg_1)\ | = \left|\sum_{k=0}^{\dim X-2n} \sigma_{2n+k}|c_k|^2\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\dim X-2n} \sigma_{2n+k}|c_k|^2 \leqslant \sigma_{2n},\end{aligned}$$

这是由于 $\|g\| = 1$, 则 $\sum |c_k|^2 \leqslant 1$. 从而

$$\max_{\substack{x\in V'\\ \|x\|=1}} \Re[Tx,x] \leqslant \sigma_{2n}.$$

所以,

$$v_n = \min_{\operatorname{co}\dim V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \Re[Tx,x] \leqslant \sigma_{2n}. \tag{4.2.45}$$

综合式 (4.2.42) 与式 (4.2.45), 便得式 (4.2.38). □

定理 4.2.29 若 T 是 X 上的一个 C-对称算子, $\sigma_0 \geqslant \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant 0$ 是 T 的奇异值, 则

$$\sigma_n = \min_{\operatorname{co}\dim_{\mathbb{R}} V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \Re[Tx,x], \tag{4.2.46}$$

其中, V 是复的可分 Hilbert 空间 X 上的所有实线性子空间, $V^{\perp}$ 也是实线性子空间且 $\operatorname{co}\dim_{\mathbb{R}} V = \dim V^{\perp}$.

证明　同定理 4.2.28 证明类似, 第一步, 选取 V 是实的线性空间, 使 $\operatorname{co}\dim_{\mathbb{R}} V = n$, 则 $W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $n+1$ 维实的线性空间, 构造 $f = a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in V$, 且 $\|f\| = 1$, 便得

$$\min_{\operatorname{co}\dim V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \Re[Tx, x] \geqslant \sigma_n.$$

第二步, 构造 $V' = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathrm{i}e_0, \cdots, \mathrm{i}e_n, e_{n+1}, \mathrm{i}e_{n+2}, \mathrm{i}e_{n+3}, \cdots\}$, 同样步骤得到另一不等式, 从而得到等式 (4.2.46). □

根据双线性型与 C-对称算子之间的关系, 便有如下结论.

定理 4.2.30　若 $B : X \times X \to \mathbb{C}$ 是一个紧的对称双线性型, $\sigma_0 \geqslant \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$ 是 B 的奇异值, 则

$$\min_{\operatorname{co}\dim V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \Re B(x, x) = \begin{cases} \sigma_{2n}, & 0 \leqslant n \leqslant \dfrac{\dim X}{2}, \\ 0, & n > \dfrac{\dim X}{2}, \end{cases} \tag{4.2.47}$$

且

$$\min_{\operatorname{co}\dim V=n} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \Re[Tx, x] = \sigma_n. \tag{4.2.48}$$

4.3　C-对称算子的特征结构

4.3.1　特征值与特征子空间

设 X 是可分的 Hilbert 空间, C 是 X 上的一个 C-算子, T 是 C-对称有界线性算子, $(\cdot, \cdot)$ 表示空间 X 上的内积, $[\cdot, \cdot]$ 表示 X 上的双线性型

$$[x, y] = (x, Cy), \quad \forall x, y \in X. \tag{4.3.1}$$

如果 $[x, y] = (x, Cy) = 0$, 则称 x 与 y 在 $[\cdot, \cdot]$ 下是正交的或 C-正交的, 记为 $x \perp_C y$. 称两个子空间 E 和 F 是 C-正交的 (记作 $E \perp_C F$), 如果 $[x, y] = 0$ 对任意 $x \in E$ 和 $y \in F$ 都成立. 容易证明双线性型 (4.3.1) 是非退化的, 即对于任意 $x \in X$, $[x, x] = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 与共轭双线性型 $(\cdot, \cdot)$ 不同的是双线性型 $[\cdot, \cdot]$ 不一定非负, 因为对于任意的 θ, $[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}x, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}x] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[x, x]$.

引理 4.3.1　C-对称算子 T 对应不同特征值的特征向量在双线性型 $[\cdot, \cdot]$ 下是正交的.

证明 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2, Tx_1 = \lambda_1 x_1, Tx_2 = \lambda_2 x_2$, 则

$$\lambda_1[x_1, x_2] = [\lambda_1 x_1, x_2] = [Tx_1, x_2] = [x_1, Tx_2] = [x_1, \lambda_2 x_2] = \lambda_2[x_1, x_2],$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 $[x_1, x_2] = 0$. □

定理 4.3.2 若 T 是 C-对称算子, 并且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则对 $m_1, m_2 \geqslant 0$,

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I)^{m_1} \perp_C \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I)^{m_2}. \tag{4.3.2}$$

特别地, C-对称算子的不同特征值对应的特征子空间是 C-正交的.

证明 当 $m_1 = m_2 = 1$ 时, 由引理 4.3.1 便可得. 不失一般性, 不妨设 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I)^{m_1} = \operatorname{span}\left\{x, Tx, T^2x, \cdots, T^{m_1}x\right\} = \varepsilon_1,$$

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I)^{m_2} = \operatorname{span}\left\{y, (T - \lambda I)y, (T - \lambda I)^2 y, \cdots, (T - \lambda I)^{m_2} y\right\} = \varepsilon_2,$$

其中, $T^{m_1}x \neq 0$, $(T - \lambda I)^{m_2} y \neq 0$, 而 $T^{m_1+1}x = 0$, $(T - \lambda I)^{m_2+1} y = 0$.

只需证明子空间 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 C-正交的, 或在 $[\cdot, \cdot]$ 下是正交的. 先证明 $(T - \lambda I)^{m_2} y$ 与 ε_1 是 C-正交的. 对于 $0 \leqslant j \leqslant m_1$,

$$\begin{aligned}
\lambda^{m_1+1-j}[T^j x, (T - \lambda I)^{m_2} y] &= [T^j x, \lambda^{m_1+1-j}(T - \lambda I)^{m_2} y] \\
&= [T^j x, T^{m_1+1-j}(T - \lambda I)^{m_2} y] \\
&= [T^{m_1+1} x, (T - \lambda I)^{m_2} y] = 0.
\end{aligned}$$

又因为 $\lambda \neq 0$, 所以

$$[T^j x, (T - \lambda I)^{m_2} y] = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant m_1,$$

从而得 $(T - \lambda I)^{m_2} y \perp_C \varepsilon_1$.

对于某 k $(0 \leqslant k \leqslant m_2 - 1)$, 若 $[T^j x, (T - \lambda I)^{m_2-k} y] = 0$ $(0 \leqslant j \leqslant m_1)$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\lambda[T^j x, (T - \lambda I)^{m_2-k-1} y] &= [T^j x, \lambda(T - \lambda I)^{m_2-k-1} y + (T - \lambda I)^{m_2-k} y] \\
&= [T^j x, (\lambda I + T - \lambda I)(T - \lambda I)^{m_2-k-1} y] \\
&= [T^j x, T(T - \lambda I)^{m_2-k-1} y] \\
&= [T^{j+1} x, (T - \lambda I)^{m_2-k-1} y],
\end{aligned}$$

从而

$$\lambda^{m_1+1-j}[T^j x, (T - \lambda I)^{m_2-k-1} y] = [T^{m_1+1} x, (T - \lambda I)^{m_2-k-1}] = 0.$$

由于 $\lambda \neq 0$, 所以, 对于 $0 \leqslant j \leqslant m_1$, $[T^j x, (T-\lambda I)^{m_2-k-1}y] = 0$ 成立, 也就说明了

$$[T^j x, (T-\lambda I)^{m_2-k}y] = 0, \quad \forall 0 \leqslant j \leqslant m_1,\ 0 \leqslant k \leqslant m_2. \qquad \square$$

我们仍然用 $\rho(T)$ 和 $\sigma(T)$ 分别表示线性算子 T 的正则集和谱集, 而用 $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 表示对应于任意 $\lambda \in \rho(T)$ 的预解算子. 采用预解算子的积分来研究一般的特征空间是谱理论中常用的一种方法, 如果 T 是定义在复 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子, f 是 $\sigma(T)$ 的邻域 Ω 上的解析函数, 则 Riemann 积分

$$f(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma} f(z) R(z, T) \mathrm{d}z, \tag{4.3.3}$$

定义了一个有界线性算子 $f(T)$, 其中 Γ 在 Ω 内, 并且是包含 $\sigma(T)$ 的 Jordan 曲线.

如果 T 是定义在复 Hilbert 空间 X 上的闭线性算子, 对于 $\sigma(T)$ 的每一个相对开闭 (clopen) 子集 Δ 存在一个积分

$$P(\Delta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma} R(z, T) \mathrm{d}z, \tag{4.3.4}$$

其中 Γ 是包含 Δ 的封闭 Jordan 曲线, 并且 Γ 的内部 $\mathrm{int}(\Gamma)$ 与 $\sigma(T)\backslash\Delta$ 不相交, 称这个积分算子为算子 T 对应 Δ 的 Riesz 积分(投影). 容易证明积分 (4.3.4) 与包含 Δ 的封闭 Jordan 曲线 Γ 无关, 只要曲线 Γ 满足内部 $\mathrm{int}(\Gamma)$ 与 $\sigma(T)\backslash\Delta$ 不相交.

定理 4.3.3　由式 (4.3.4) 定义的算子 T 对应 Δ 的 Riesz 积分 (投影) 是一个投影算子.

证明　设 Γ, $\tilde{\Gamma}$ 是两条满足上述条件的封闭 Jordan 曲线, 并且 $\Gamma \subset \mathrm{int}\tilde{\Gamma}$, 则

$$P(\Delta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma} R(z, T) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\tilde{\Gamma}} R(z, T) \mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned} P^2(\Delta) &= (2\pi \mathrm{i})^{-2} \oint_{\Gamma} \mathrm{d}\lambda \oint_{\tilde{\Gamma}} R(\lambda, T) R(\mu, T) \mathrm{d}\mu \\ &= (2\pi \mathrm{i})^{-2} \oint_{\Gamma} \mathrm{d}\lambda \oint_{\tilde{\Gamma}} (\mu - \lambda)^{-1} (R(\lambda, T) - R(\mu, T)) \mathrm{d}\mu \\ &= (2\pi \mathrm{i})^{-2} \oint_{\Gamma} \mathrm{d}\lambda \oint_{\tilde{\Gamma}} (\mu - \lambda)^{-1} R(\lambda, T) \mathrm{d}\mu - (2\pi \mathrm{i})^{-2} \oint_{\Gamma} \mathrm{d}\lambda \oint_{\tilde{\Gamma}} (\mu - \lambda)^{-1} R(\mu, T) \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

根据 Cauchy 积分定理, 上面第一项积分为 0, 第二项积分为 $P(\Delta)$. 所以 $P^2(\Delta) = P(\Delta)$, 即 $P(\Delta)$ 是投影算子.

如果算子 T 的谱可以分解成为两个互不相交的相对开闭的 Δ, 对应的 Riesz 积分不一定是自伴的 (不一定是正交投影), 所以两个投影算子也不一定相互正交.

$\square$

定理 4.3.4 设 T 是一个 C-对称算子, $\sigma(T)$ 是 T 的谱集, 如果 $\sigma(T)$ 可以表示成两个不相交的相对开或闭集 (clopen)Δ_1 和 Δ_2 的并集, $\sigma(T)=\Delta_1\cup\Delta_2$, 对应的 Riesz 投影 (积分) 为 $P_1=P(\Delta_1), P_2=P(\Delta_2)$, 则

(1) P_1 与 P_2 是 C-对称的, 即 $P_i=CP_i^*C(i=1,2)$;

(2) P_1 与 P_2 是 C-正交的, 即 $\operatorname{Ran}P_1\perp_C\operatorname{Ran}P_2$(亦即 $P_1P_2=P_2P_1=0$);

(3) 在 $D(T)$ 上, P_i $(i=1,2)$ 与 T 可交换;

(4) $\sigma(TP_i)=\Delta_i\sigma(T(I-P_i))=\sigma(T)\backslash\Delta_i$ $(i=1,2)$.

证明 (1) 根据 Riesz 积分的性质, 以及 $R(z,T)=(zI-T)^{-1}$ 的 C-对称性, 可得上述结论.

(2) 设 Γ_1,Γ_2 是两条分别包含 Δ_1 与 Δ_2 的封闭 Jordan 曲线, 并满足 $\operatorname{int}\Gamma_1\cap\operatorname{int}\Gamma_2=\varnothing$, 则

$$
\begin{aligned}
P_2P_1=P_1P_2&=(2\pi\mathrm{i})^{-2}\oint_{\Gamma_1}\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}R(\lambda,T)R(\mu,T)\mathrm{d}\mu\\
&=(2\pi\mathrm{i})^{-2}\oint_{\Gamma_1}\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}(\mu-\lambda)^{-1}(R(\lambda,T)-R(\mu,T))\,\mathrm{d}\mu\\
&=(2\pi\mathrm{i})^{-2}\oint_{\Gamma_1}\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}(\mu-\lambda)^{-1}R(\lambda,T)\mathrm{d}\mu\\
&\quad-(2\pi\mathrm{i})^{-2}\oint_{\Gamma_1}\mathrm{d}\lambda\oint_{\Gamma_2}(\mu-\lambda)^{-1}R(\mu,T)\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

根据 Cauchy 积分定理, 上面两项积分全为 0, 所以 $P_2P_1=P_1P_2=0$. 于是对于任意的 $x,y\in X$,

$$[P_1x,P_2y]=[x,P_1P_2y]=0,$$

所以, P_1 与 P_2 是 C-正交的.

(3) 由于 $R(z,T)=(zI-T)^{-1}$ 与 T 是可交换的, 所以 P_i 与 T 可交换.

(4) 只证明第一个等式. 因为 TP_1 是算子 T 在 T 的不变子空间 $\operatorname{Ran}P_1$ 上的限制, 所以 $\rho(T)\subset\rho(TP_1)$, 从而 $\sigma(TP_1)\subset\sigma(T)$. $R(z,T)=(zI-T)^{-1}$ 在 T 的不变子空间 $\operatorname{Ran}P_1$ 上的限制就是 TP_1 的预解算子, 所以 $\sigma(TP_1)\subset\Delta_1$. 对集合 $\rho(TP_1)$ 继续估计,

$$
\begin{aligned}
R(z,T)P_1&=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_1}R(z,T)R(\mu,T)\mathrm{d}\mu\\
&=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\left[\oint_{\Gamma_1}(z-\mu)^{-1}R(z,T)\mathrm{d}\mu-\oint_{\Gamma_1}(z-\mu)^{-1}R(\mu,T)\mathrm{d}\mu\right],
\end{aligned}
$$

根据 Cauchy 积分定理, 上面第一项积分为 0, 第二项积分关于 z 在 Γ_1 外是解析的. 从而, $R(z,T)P_1=(z-TP_1)^{-1}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\overline{\operatorname{int}\Gamma_1}$ 上解析. 将 Γ_1 收缩到 Δ_1 的边界,

所以 $R(z,T)P_1=(z-TP_1)^{-1}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Delta_1$ 上解析, 故得到 $\sigma(TP_1)=\Delta_1$. 同样可以证明 i=2 的情形及第二个等式. □

定义 4.3.5 设 X 是可分的 Hilbert 空间, P 是 X 上的投影算子, 称算子 P 是 C-投影算子是指 P 是 C-对称的, 且 $P^2=P$.

若 P 是 C-投影算子, 则 $\|P\|\geqslant 1$, $\mathrm{Ran}P$ 是闭的, 而且 $\mathrm{Ker}P\cap\mathrm{Ran}P=\{0\}$.

设 $\lambda_0\in\sigma(T)$ 是孤立谱点, Γ_{λ_0} 是一条围绕 λ_0 的封闭曲线, Γ_{λ_0} 所围区域与 $\sigma(T)$ 只有一个交点 λ_0, 在 λ_0 处算子 T 的 Riesz 积分

$$P_{\lambda_0}=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_{\lambda_0}}R(\lambda,T)\mathrm{d}\lambda. \tag{4.3.5}$$

定理 4.3.6 设 T 是定义在复的 Hilbert 空间 X 上的闭线性算子, P_{λ_0} 是算子 T 在 λ_0 处的 Riesz 积分,

(1) P_{λ_0} 是一个投影;

(2)

$$\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}\supset\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I); \tag{4.3.6}$$

(3) 若 T 是 C-自伴的, 则 P_{λ_0} 是 $\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$ 上的 C-正交投影.

证明 (1) 由定理 4.3.3 立得.

(2) 若 $f\in\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$, 则对 $\lambda\neq\lambda_0$,

$$(T-\lambda I)^{-1}f=(\lambda_0-\lambda)^{-1}f. \tag{4.3.7}$$

根据 P_{λ_0} 的定义有

$$P_{\lambda_0}f=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_{\lambda_0}}(T-\lambda I)^{-1}f\mathrm{d}\lambda=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_{\lambda_0}}(\lambda_0-\lambda)^{-1}f\mathrm{d}\lambda=f,$$

所以 $f\in\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}$, 即式 (4.3.6) 成立.

(3) 根据定理 3.4.4 可知 P_{λ_0} 是 C-正交投影. 只需证明 $\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}=\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$, 由 (2) 可知, 只需证明 $\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}\subset\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$. 计算 $(T-\lambda_0 I)P_{\lambda_0}$ 有

$$\begin{aligned}(T-\lambda_0 I)P_{\lambda_0}&=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_{\lambda_0}}(T-\lambda_0 I)(T-\lambda I)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\&=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_{\lambda_0}}(T-\lambda I+\lambda I-\lambda_0 I)(T-\lambda I)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\&=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_{\lambda_0}}(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda I)^{-1}\mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

用 U 记 Γ_{λ_0} 的内部, 在 $U\backslash\{\lambda_0\}$上, 算子 $(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda I)^{-1}$ 关于 λ 是解析的并且

$$|\lambda-\lambda_0|\ \|(T-\lambda I)^{-1}\|\leqslant|\lambda-\lambda_0|\ d(\lambda,\sigma(T))^{-1},$$

其中 $d(x,y)$ 表示 x 与 y 之间的距离. 取 Γ_{λ_0} 的半径充分小使得 λ_0 是 $\sigma(T)$ 中与 Γ_{λ_0} 最近的点, 且在 $U\backslash\{\lambda_0\}$上 $|\lambda-\lambda_0|\ \|(T-\lambda I)^{-1}\|\leqslant 1$. $(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda I)^{-1}$ 在 $U\backslash\{\lambda_0\}$上解析, 根据 Cauchy 定理, 积分 (4.3.8) 等于零算子, 即 $\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}\subset\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$. □

一般地, 对于闭算子 T 有 $\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}\supset\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$, 所以, 任意的 $y\in\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}$ 都是 T 在 $(T-\lambda_0 I)^n y=0$ 意义下的广义化的特征向量. 使得 $(T-\lambda_0 I)^n y=0$ 成立的最大的 n 称为 λ 的代数重数. 不难看出特征值 λ 的代数重数等于 $\mathrm{Ran}P_{\lambda_0}$ 的维数. 而特征值 λ 的几何重数等于 $\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$ 的维数. 根据定理 4.3.6 可知, 特征值 λ 的几何重数一般小于或等于它的代数重数. 对于自伴算子而言特征值 λ 的几何重数等于它的代数重数.

定理 4.3.7 紧 C-对称算子的不同特征值对应的特征子空间是相互 C-正交的.

证明 由定理 4.3.2 可知, 对于紧 C-对称算子非零特征值对应的特征空间是 C-正交的. 由于 T 是紧的, 0 也可能是它的特征值, 由定理 4.3.3 可知, 任何非零特征值对应的特征向量与 0 对应的特征向量 (若存在) 也是 C-正交的. 也可以表示为对任意小的 $\varepsilon>0$, 任何非零特征值对应的特征向量与 $\mathrm{Ran}P_\varepsilon$ 是 C-正交的, 其中

$$P_\varepsilon=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=\varepsilon}R(z,T)\mathrm{d}z,$$

这里 $\mathrm{Ran}P_\varepsilon$ 包含特征值 0 对应的特征向量 (若存在). □

4.3.2 迷向特征向量及其重数

在复 Hilbert 空间 X 中, 若 $[x,x]=0$, 则称向量 x 是关于 $[\cdot,\cdot]$ 迷向的 (isotropic). 显然, 0 是一个迷向向量.

引理 4.3.8 若 C 是复 Hilbert 空间 X 上的一个 C-算子, 则每个维数 $\geqslant 2$ 的子空间包含关于双线性型 $[x,y]=(x,Cy)$ 的非零迷向向量.

证明 设 $\dim X\geqslant 2$, 考虑 X 上的两个线性无关非零向量 x_1,x_2, 若 x_1,x_2 中有一个是迷向的, 则得证. 若 x_1,x_2 均不是迷向的, 令

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_2-\frac{[x_2,x_1]}{[x_1,x_1]}x_1,$$

则得到了一对 C-正交向量 y_1,y_2 与 x_1,x_2 具有相同的线性包.

若 y_2 是迷向的, 结论得证. 若 y_2 也不是迷向的, 则 y_1,y_2 均不是迷向的, 可以将 y_1,y_2 规范化, 使得 $[y_1,y_1]=1$, $[y_2,y_2]=1$. 很容易验证, $y_1\pm\mathrm{i}y_2$ 都是迷向的.□

引理 4.3.8 说明, 若孤立特征值系是完备的, 则一定存在迷向的特征向量.

定理 4.3.9　若 T 是复 Hilbert 空间 X 上的 C-对称算子, 则 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 是 T 的简单特征值的充分必要条件是 λ 没有迷向特征向量.

证明　若 λ 是算子 T 的孤立特征值, 则对应 λ 的 Riesz 积分 $P = P(\lambda)$ 是一个 C-投影. 若 λ 是简单特征值, 对应的特征向量为 x, 并且 x 是迷向的, 则 $[x, x] = 0$. 而 x 与 $\mathrm{Ran}(I - P)$ 是 C-正交的, 从而 x 与空间 X 是 C-正交的, 即有 $x \equiv 0$, 矛盾, 所以 x 不是迷向的.

反之, 若 λ 不是简单特征值, 则有两种情形:

情形 1　若 $\dim \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I}) > 1$, 则由引理 4.3.8 知, $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ 包含有一个迷向向量, 所以 T 具有一个迷向特征向量.

情形 2　若 $\dim \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = 1$, 则 $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \mathrm{span}\{x\}, x \neq 0$, 而因为 λ 不是简单的特征值, 故 $\dim \mathrm{Ker}(T - \lambda I)^2 > 1$, 所以, 存在一个非零向量 y, 使得 $x = (T - \lambda I)y$, 且

$$[x, x] = [x, (T - \lambda I)y] = [(T - \lambda I)x, y] = 0,$$

所以 x 是一个迷向特征向量.　□

定理 4.3.10　若 T 是复 Hilbert 空间 X 上的 C-对称有界线性算子, 则对每一个复数 $\lambda \in \mathbb{C}$, 存在一个递增的子空间序列 K_n^λ, 使得

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n = [\mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n \cap \overline{\mathrm{Ran}(T - \lambda I)^n}] \oplus K_n^\lambda, \tag{4.3.9}$$

既是直交和也是 C-直交和, 而且 $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n \cap \overline{\mathrm{Ran}(T - \lambda I)^n}$ 包含迷向向量.

证明　考虑 $\lambda = 0$ 的情形, 对每个 n, 存在一个子空间 $K_n = K_n^0$ 使得,

$$\mathrm{Ker}\, T^n = [\mathrm{Ker}\ T^n \cap \overline{\mathrm{Ran}\ T^n}] \oplus K_n,$$

其中, $\oplus$ 是普通直交和, 而且由于 $\mathrm{Ker}\ T^n$ 与 $\overline{\mathrm{Ran}\ T^n}$ 是 C-正交的, 并且 $K_n \subset \mathrm{Ker}\ T^n$, 则式 (4.3.9) 也是 C-直交和分解. 特别地, $\mathrm{Ker}\ T^n \cap \overline{\mathrm{Ran}\ T^n}$ 中每个向量都是迷向的, 由 $\mathrm{Ker}\ T^n \subseteq \mathrm{Ker}\ T^{n+1}$, $\mathrm{Ran}\ T^{n+1} \subseteq \mathrm{Ran}\ T^n$ 得到 K_n 是递增集合序列.　□

4.3.3　拟幂零向量

复 Hilbert 空间 X 上的一个有界线性算子 $T: X \to X$ 称为是幂零的 (nilpotent), 如果存在正整数 n, 使得

$$T^n \equiv 0; \tag{4.3.10}$$

有界线性算子 $T: X \to X$ 称为是拟幂零的 (quasinilpotent), 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0; \tag{4.3.11}$$

X 中的非零向量 q 关于 T 称为是拟幂零向量 (quasinilpotent vector), 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n q\|^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{4.3.12}$$

很容易验证, 若 T 是紧算子, 则关于 T 的所有拟幂零向量所生成的空间 Q 与 T^* 特征空间的直交空间重合.

定理 4.3.11 若 T 是复 Hilbert 空间 X 上的一个 C-对称算子, $\forall m \geqslant 0$, $Q \perp_C \mathrm{Ker}(T-\lambda I)^m$, $\lambda \neq 0$. 也就是每个拟幂零向量都与 T 的非零特征值对应的特征子空间 C-正交.

证明 当 $m=0$ 时, $\mathrm{Ker}\, I = \{0\}$, 由此得 $Q \perp_C \mathrm{Ker}\, I$. 假设 $Q \perp_C \mathrm{Ker}\,(T-\lambda I)^m$ 成立, 利用数学归纳法, 证明 $\forall q \in Q, \forall x \in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda I)^{m+1} (\|x\|=1)$, 都有 $[q,x]=0$ 成立即可. 事实上, $y=(T-\lambda I)x \in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda I)^m$, 故 $[q,y]=0$, 从而

$$\lambda[q,x] = [q,\lambda x] = [q,Tx] - [q,y] = [Tq,x],$$

$$\lambda^n[q,x] = [T^n q, x],$$

$\forall n \geqslant 0$, $|\lambda|^n \, |[q,x]| = |[T^n q, x]| \leqslant \|T^n q\| \, \|x\| = \|T^n q\|$, 即有

$$|\lambda| \, |[q,x]|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|T^n q\|^{\frac{1}{n}} \to 0,$$

而 $\lambda \neq 0$, 所以 $[q,x]=0$, 因此 $Q \perp_C \mathrm{Ker}(T-\lambda I)^m$. □

4.3.4 C-对称算子的对角化

设 T 是定义在复 Hilbert 空间 X 上的一个 C-对称算子, 并且具有一个完备的特征系 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即 $X = \overline{\mathrm{span}\{u_n\}}$, 若对应的特征值 λ_n 互不相同, 由定理 4.3.2 知 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是互相 C-正交的, 所以, 可以假设

$$[u_i, u_j] = \sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

(因为 $[u_n, u_n] \neq 0$. 若不然, 设 $[u_n, u_n] = 0$, 则 $\forall x \in X$, $[u_n, x] = 0$, 而 $\{u_n\}$ 在 X 内完备, 所以 $u_n \equiv 0$, 矛盾.)

令 $F = \{f \in X \mid f\text{是由有限个}\{u_n\}\text{的线性组合}\}$, 则 $\forall f \in F$,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} [f, u_n] u_n, \tag{4.3.14}$$

其中, $[f, u_n]$ 有有限个不为零. 式 (4.3.14) 称为反 Fourier 展开 (skew Fourier expansion). 在空间 F 上定义算子 $A_0: F \to X$,

$$A_0 u_n = C u_n. \tag{4.3.15}$$

由于 F 在 X 上是稠密的, 所以 A_0 在 X 上存在唯一的一个扩张, 记作 A.

复 Hilbert 空间 X 上定义算子 $U: X \to X$, 称为是 C-正交算子 (C-orthogonal operator), 如果满足 $CU^*CU = I$. 若 U 是 C-正交算子, 则 $[Ux, Uy] = [x, y]$. C-正交算子与正交算子不同, C-正交算子的范数有可能是无界的.

引理 4.3.12　若 A_0 是有界算子, 则 A_0 的扩张 $A: X \to X$ 是正的 C-正交算子, 在此情形下, A 是可逆的, $A^{-1} = CAC$, 并且 $B = \sqrt{A}$ 也是 C-正交算子,

证明　由公式 (4.3.14), 得

$$(A_0 f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} |[f, u_n]|^2 \geqslant 0, \quad \forall f \in F.$$

若 A_0 是有界的, 则由连续性, A 也是有界正算子. 又由于 $\forall u_n \in \{u_n\}$,

$$(CA^*C)Au_n = (CA)^2 u_n = u_n,$$

所以 A 是 C-正交算子, $(CA)^2 = I, A^{-1} = CAC$.

再根据 $(CBC)(CBC) = CAC = A^{-1}, CBC \geqslant 0$, 得 (CBC) 是 A^{-1} 的一个正的平方根算子, 即

$$(CBC) = (A^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

根据平方根的唯一性得 $(CBC) = B^{-1}$, 故 B 是 C-正交算子. □

引理 4.3.13　若 A_0 是有界的, 则由 $v_n = Bu_n (B = \sqrt{A})$ 定义的向量组 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

(1) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正交的, $(v_i, v_j) = \sigma_{ij},\ i, j \neq 1, 2, \cdots$;

(2) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C-正交的, $[v_i, v_j] = \sigma_{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots$;

(3) $Cv_n = v_n,\ n = 1, 2, \cdots$.

证明　对于 $\forall i, j = 1, 2, \cdots$,

$$(v_i, v_j) = (Bu_i, Bu_j) = (u_i, Au_j) = (u_i, Cu_j) = [u_i, u_j] = \sigma_{ij};$$

$$[v_i, v_j] = (v_i, Cv_j) = (Bu_i, CBu_j) = (Bu_i, B^{-1}Cu_j) = (u_i, Cu_j) = \sigma_{ij},$$

从而 $Cv_j = CBu_j = B^{-1}Cu_j = B^{-1}B^2 u_j = Bu_j = v_j$. □

而且 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是完备的, 这是因为若 $(f,v_j)=0,\ j=1,2,\cdots$, 则 $0=(f,v_j)=(f,Bu_j)=(Bf,u_j),\ j=1,2,\cdots$. 由于 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 X 中是完备的, 且 B 是可逆的, 所以 $f\equiv 0$, 即 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ 完备.

定义对角算子 $D:X\mapsto X$, $Dv_n=\lambda_n v_n$, 则有

$$T=B^{-1}DB,$$

即得到 C-对称算子 T 的对角化.

4.3.5 特征向量的 Riesz 基

Hilbert 空间 X 中的任意序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 Bessel 序列, 若存在常数 $M>0$, 使得 $\forall x\in X$,

$$\sum_{u=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant M\|x\|^2; \tag{4.3.16}$$

若存在常数 $M_1,\ M_2>0$, 使得

$$M_1\|x\|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant M_2^2\|x\|^2, \tag{4.3.17}$$

则称序列 $\{u_n\}$ 是一个 Riesz 基.

定理 4.3.14 若 $\{u_n\}$ 是 X 中一个完备的 C-正交系, 则下列命题等价:

(1) $\{u_n\}$ 是一个 Bessel 序列且具有 Bessel 界 M.

(2) $\{u_n\}$ 是一个 Riesz 基具有上下界 M,M^{-1}.

(3) $A_0u_n=cu_n$ 扩张成一个有界线算子 $A:H\to H$, 满足 $\|A\|\leqslant M$.

(4) 存在 $M>0$, 满足

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\overline{c_n}u_n\right\|\leqslant M\left\|\sum_{n=1}^{m}c_nu_n\right\|$$

对每个有限序列 $c_1,c_2,\cdots,c_m$.

(5) Gram 矩阵 $G=[(u_j,u_k)]_{j,k=1}^{\infty}$, 对 $M>0$,

$$M^2\geqslant GG^*\geqslant 0.$$

(6) Gram 矩阵 $G=[(u_k,u_j)]_{j,k=1}^{\infty}$ 在 $l^2(w)$ 上有界的, 并且 $\|G\|\leqslant M$, G 是正交的.

(7) 对每个 $f\in X$, Fourier 展式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f,u_n]u_n$ 依范数收敛于 f, 并且

$$\frac{1}{M}\|f\|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|[f,u_n]|^2\leqslant M\|f\|^2,\quad \|A_0\|=\inf\{M\}.$$

4.4　无界 C-对称算子

设 X 是可分的 Hilbert 空间, $T: D(T) \to X$ 是闭稠密线性算子, C 是 X 上的 C-算子.

定义 4.4.1　对 $\forall f, g \in D(T)$,

$$(CTf, g) = (CTg, f), \tag{4.4.1}$$

也就是 $CT \subset T^*C$ (即 $TC \subset CT^*$ 或 $T \subset CT^*C$), 则称 T 是 C-对称算子. 若 $T = CT^*C$ (即 $CT = T^*C$ 或 $TC = CT^*$), 则称 T 是 C-自伴算子.

例如, 在例 1.1.15 中复系数的 Sturm-Liouville 算式 (1.1.10)生成的最小算子 T_0 是一个无界 C-对称算子 (J-对称算子), 赋以分离的自伴边条件所生成的无界算子 T 是 C-自伴微分算子 (J-自伴的微分算子).

对有界算子而言 C-对称与 C-自伴是一样的, 而对无界算子是有区别的, 在第 5 章详细研究, C-对称和 C-自伴有时也称为 J-对称和 J-自伴, 但在 Krein 空间中 C-自伴与 J-自伴是不相同的.

4.4.1　C-自伴算子谱的结构

定理 4.4.2　若 T 是 Hilbert 空间 X 上的 C-自伴算子, 则 $\sigma_r(T) = \varnothing$.

证明　反证法. 若 $\sigma_r(T) \neq \varnothing$, 则存在 $\lambda \in \sigma_r(T)$, 使得 $\overline{R(T - \lambda I)} \neq X$. 从而

$$\mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} I) = R(T - \lambda I)^{\perp} \neq \{0\}.$$

故在 X 上存在 $y(\neq 0)(Cy \neq 0)$, 使得 $y \in \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} I)$, 即

$$(T^* - \bar{\lambda} I)y = 0.$$

因为 T 是 C-自伴算子, 即 $CTC = T^*$, 所以

$$(CTC - \overline{\lambda} I)y = 0,$$

即

$$C(T - \lambda I)Cy = 0.$$

所以, $(T - \lambda I)Cy = 0$, 也就是 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 矛盾. 故 $\sigma_r(T) = \varnothing$. □

根据定理 4.4.2 的结论可知, Hilbert 空间 X 上的 C-自伴算子 T 的谱是由点谱 $\sigma_p(T)$ 和连续谱 $\sigma_c(T)$ 组成的, 即

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T); \tag{4.4.2}$$

或者由离散谱 $\sigma_d(T)$ 和本质谱 $\sigma_e(T)$ 组成的, 即

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) \cup \sigma_e(T). \tag{4.4.3}$$

定理 4.4.3 若 T 是 Hilbert 空间 X 上的 C-自伴算子, 则 $\sigma(T)$ 的孤立点是 T 的特征值.

证明 若 λ 是 $\sigma(T)$ 的孤立点, 假设 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)=\{0\}$, 即 λ 不是特征值, 则根据定理 4.3.6 可知 $\mathrm{Ran}\, P_\lambda=\{0\}$ (P_λ 如式 (4.3.5) 所定义), 所以

$$P_\lambda = (2\pi\mathrm{i})^{-1}\oint_{\Gamma_\lambda} R(z,T)\mathrm{d}z = 0,$$

这里 Γ_λ 是复平面上一条包围 λ 的简单 Contour 闭曲线. 根据复分析中的 Morera 定理可知 $R(z,T)$ 在 $z=\lambda$ 某一邻域内是解析的, 所以 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾. □

定理 4.4.4 若 T 是 Hilbert 空间 X 上的 C- 自伴算子, 且 $\lambda\in\sigma(T)$. 则 $\lambda\in\sigma_d(T)$ 当且仅当 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 是有限维的, $(T-\lambda I)|_{[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T)}$ 具有有界逆.

证明 必要性. 若 $\lambda\in\sigma_d(T)$, 则 X 具有如下的直和分解

$$X = \mathrm{Ker}(T-\lambda I)\oplus[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp,$$

每个子空间都是闭的且 T-不变. 设 $T_0 = T|_{[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T)}$, 则 T_0 在 $[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T)$ 上是 C-自伴算子, 并且 $\mathrm{Ker}(T_0-\lambda I)=\{0\}$. 因为 λ 是孤立点, 不包含在 $\sigma(T_0)$ 内, 即 $\lambda\in\rho(T_0)$, 所以 $(T_0-\lambda \mathrm{I})$ 在 $[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T)$ 上具有有界逆, 从而 $(T-\lambda I)|_{[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T)}$ 具有有界逆. 由于 λ 是离散谱点, 根据 $\sigma_d(T)$ 的定义可知 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 是有限维的.

充分性. 由于 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 是有限维子空间, 所以 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 也是 X 的闭子空间. 设 P 是 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 上的正交投影算子, 且

$$T_\lambda = (T-\lambda I)|_{[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T)},$$

则 T_λ 在 $[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(A))$ 上具有有界逆的充分必要条件是 $0\in\rho(T_\lambda)$. 由于 $\rho(T_\lambda)$ 是开集, 存在 0 的一个邻域 W, 使得 $W\subset\rho(T_\lambda)$. 选取 $z\neq\lambda$, 但充分接近 λ, 使得 $\lambda-z\in W$, $T_\lambda-(\lambda-z)I$ 具有有界逆. 在 X 上定义直和算子

$$R(z) = (\lambda-z)^{-1}P\oplus(T_\lambda-(\lambda-z)I)^{-1},$$

则 $R(z)$ 是有界算子. 只需要证明 $R(z)$ 是 $(T-\lambda I)$ 的逆算子, 结论便成立. 实际上,

$$\begin{aligned}(T-zI)R(z) &= (\lambda-z)^{-1}(T-zI)P\oplus(T-zI)(T_\lambda-(\lambda-z)I)^{-1}\\ &= P\oplus(T-zI)(T-zI)-1(I-P) = P\oplus(I-P) = I,\end{aligned}$$

在此利用了 PX 的不变性和 P 的定义. 由此得 $z \in \rho(T)$, 所以 $(W+\lambda)\setminus\{\lambda\} \subset \rho(T)$. 这就意味着 λ 是 $\sigma(T)$ 的孤立点, λ 是 T 的特征值, 故 $\lambda \in \sigma_d(T)$. □

推论 4.4.5　若 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 是有限维的, 则 $\lambda \in \sigma_e(T)$ 当且仅当 $(T-\lambda I)|_{[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^{\perp}\cap D(T)}$ 没有有界逆.

定理 4.4.6　Hilbert 空间 X 上的紧算子 T 的谱至多包含可数多个点, 除 0 点外没有其他聚点, 每个非零谱点都是 T 的有限重特征值. 如果 T 是 Hilbert 空间 X 上的 C-自伴算子, 则上述结论的逆也成立.

证明　定理的第一部分的证明由 2.5.4 小节中的讨论及定理 2.5.23 的证明可得. 在此只证明第二部分.

如果 T 的谱仅包含有限多个非零点, 则每个谱点是 T 的有限重特征值. 所以, T 是有限秩算子, 即紧算子.

如果 T 的谱包含可数多个非零点且以 0 点为聚点, 每个非零谱点都是 T 的有限重特征值, 即

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\} \cup \{0\},$$

在此, 当 $n \to \infty$ 时 $\lambda_n \to 0$.

令 $r = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, \cdots\}$, 且设 $s = r+1$. 设 Γ_s 是复平面上以 s 为半径, 以 0 点为圆心的闭曲线, 则 Γ_s 包含 $\sigma(T)$. 在复平面上取一列互不相交的包含原点的封闭 Jordan 曲线 $\{\Gamma_n\}$, 满足 Γ_{n+1} 包含在 Γ_n 内, Γ_n 的半径小于 $\dfrac{s}{n}$, 而且在 Γ_n 内部含有 $\sigma(T)$ 的点.

用 $\bar{\Gamma}_n = \Gamma_s \cup \Gamma_n$ 记集合 $B = \mathrm{int}\ (\Gamma_s)\backslash \mathrm{int}\ (\Gamma_n)$ 的边界, 则 B 内仅包含 $\sigma(T)$ 的有限多个点. 令

$$P_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\bar{\Gamma}_n} R(z,T)\mathrm{d}z,$$

则根据定理 4.3.6, P_n 是有限秩 C-自伴算子且在 $D(T)$ 上与 T 可交换, $\{TP_n\}$ 也是有限秩 C-自伴算子. 由于 $TP_n \to T\ (n\to\infty)$, 所以 T 是紧算子. □

注　另一证法: 由 $T = CJ|T|$ 的分解, 也可以证明定理 4.4.6 结论.

4.4.2 半线性特征展开

自伴算子对应的谱分解定理, 若对应的谱是特征值, 则有其特征展开, 对于无界的自伴算子而言, 当其有紧的预解算子, 那么无界自伴算子也有其特征展开, 根据定理 4.2.22 可知有界紧的 C-对称算子有一个类似的特征展开, 那么对于无界 C-自伴算子也有类似的结论.

定理 4.4.7　若 $T: D(T) \to X$ 是一个无界 C-自伴算子, 并且对于某一 $z \in \mathbb{C}$, 预解算子 $(T-zI)^{-1}$ 是紧的, 则存在 X 上的一组正交基 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$, 而且, u_n

是线性特征问题

$$(T - zI)u_n = \sigma_n C u_n \tag{4.4.4}$$

的解, $\sigma_0, \sigma_1, \cdots$ 是一组非负递增的序列, 且 $\sigma_n \to \infty$.

证明 $\forall f, g \in D(T)$,

$$(C(T - zI)f, g) = (C(T - zI)g, f).$$

用 S 记紧算子 $S = (T - zI)^{-1}$, 令 $f = Sx$, $g = Sy$, 则

$$(Cx, Sy) = (Cy, Sx),$$

由此可以看出 S 是 C-对称算子, S 又是紧算子, 根据定理 4.2.22 可知, 存在 X 的一组正交基 $\{u_n\}$, 使得

$$SCu_n = \sigma_n^{-1} u_n,$$

σ_n^{-1} 是一递减的正序列且 $\sigma_n^{-1} \to 0$, 而 $u_n \in \operatorname{Ran} S = D(T)$, 两边由 $T - zI$ 作用, 便得结论. □

推论 4.4.8 若 $T : D \to H$ 是一个无界 C-自伴算子, 并且在 $z = 0$ 具有紧的预解算子, 则 $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n \in D(T)$ 的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 |a_n|^2 < \infty. \tag{4.4.5}$$

推论 4.4.9 在定理 4.4.7 的条件下,

$$\left\|(T - zI)^{-1}\right\| = \frac{1}{\sigma_0}. \tag{4.4.6}$$

定理 4.4.10 设 $T : D \to H$ 是一个闭稠定的 C-对称算子, 若存在 X 中一个完备系 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D(T)$, 及一组递增非负序列 $\{\sigma_n\} \to \infty$ 满足

$$Tu_n = \sigma_n C u_n, \tag{4.4.7}$$

则 T 是 C-自伴算子.

证明 由于 T 是 C-对称算子, 所以对于 $\sigma_k \neq \sigma_j$,

$$\sigma_j [u_j, u_k] = (CTu_j, u_k) = (u_j, CTu_k) = \sigma_k [u_j, u_k],$$

则 $\{u_j\}$ 是 C-正交的, 且 $T = CJ|T|$, $J|T|u_n = \sigma_n u_n$. 对于多重特征值情形, 适当选取 $\{u_j\}$ 是正交组, 结论也正确.

设 $f=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jCu_j\in X$, 对每个 n, $f_n=\sum\limits_{j=0}^{n}a_j\sigma_j^{-1}u_j\in D(T)$, 并且 $Tf_n=\sum\limits_{j=0}^{n}a_jCu_j\in D(T)$, 又由于 T 是闭的, 故 T 的图是闭的, 因而 $T:D(T)\to X$ 是满射, 所以 T 是 C-自伴的. □

定理 4.4.11　若 T 是 C-对称算子, $0\in\rho(T)$, 则

$$T=CJ\,|T|\,,\tag{4.4.8}$$

其中, $|T|$ 是满足 $D(|T|)=D(T)$ 并且与 J 可交换的正算子. 反之, 任何满足上述条件的算子 T 是 C-对称算子.

证明　设 T 是 C-对称算子, $0\in\rho(T)$, 则 $T:D(T)\to X$ 是满射. 设 R 是 T 的逆算子, $RX=D(T)$, 且 $TR=I$, 对 $\forall f,g\in X$,

$$(Cf,Rg)=(CTRf,Rg)=(CTRg,Rf)=(Cg,Rf),$$

即 $(R^*Cf,g)=(CRf,g)$. 所以, R 是一个有界的 C-对称算子, R^* 也是有界的 C-对称算子. 设 $R^*=CJ\,|R^*|$, 其中, J 是 X 上的 C-算子, 并且与 $|R^*|$ 可交换. 对 $R^*=CJ\,|R^*|$ 两边取共轭, 得

$$R=|R^*|\,JC,$$

而 $TR=I$, 于是 $T\,|R^*|\,JC=I$, 所以 $T\,|R^*|=CJ$, 由于 $|R^*|\,X=D(T)$, 所以, 无界正算子 $|R^*|^{-1}$ 与 T 具有相同的定义域, 而且

$$JCT\,|R^*|=I,$$

即 $JCT=|R^*|^{-1}$ 是无界算子, 从而有极分解

$$T=CJ\,|R^*|^{-1}\,.$$

将 $|R^*|^{-1}=|T|$ 代入便得结论. 反之易证. □

4.4.3　C-自伴算子的本质谱

如果 T 是 Hilbert 空间 X 上的 C-自伴算子, 则根据定理 4.4.2 的结论可知, T 的谱是由点谱 $\sigma_p(T)$ 和连续谱 $\sigma_c(T)$ 组成的 $(\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T))$; 或者是由离散谱 $\sigma_d(T)$ 和本质谱 $\sigma_e(T)$ 组成的 $(\sigma(T)=\sigma_d(T)\cup\sigma_e(T))$.

本小节给出类似关于自伴算子本质谱的 Weyl 准则 (定理 2.5.19). 用 $u_n\xrightarrow{w}u$ 表示 Hilbert 空间 X 中的序列 $\{u_i\}$ 弱收敛到 $u\in X$, 即对于任意的 $v\in X$,

$(u_i,v)\to(u,v)\ (i\to\infty)$; 用 $u_n \xrightarrow{s} u$ 表示 Hilbert 空间 X 中的序列 $\{u_i\}$ 强收敛到 $u\in X$, 即, $\|u_i-u\|\to 0\ \ (i\to\infty)$.

定理 4.4.12 如果 T 是 Hilbert 空间 X 上的 C-自伴算子, 则实数 $\lambda\in\sigma_e(A)\Leftrightarrow \exists A$ 的对应 λ 的 Weyl 序列.

证明 必要性. 设 $\lambda\in\sigma_e(A)$, 则 λ 或者是无穷维特征值, 或者 $\lambda\in\sigma_c(A)$.

(1) 当 λ 是无穷维特征值时, N_λ 为特征子空间, 取 N_λ 的一组规范正交基

$$\{u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots\}\subset N_\lambda,\quad \|u_j\|=1,\quad j=1,2,\cdots.$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}(A-\lambda I)u_j=0,$$

由于 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots\}$ 是 $N_\lambda\subset D(A)$ 的一组规范正交基, 可以扩充成为 X 的规范正交基, 对于任意的 $x\in X$, 有 $\|x\|^2\geqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}|(x,u_j)|^2$, 所以,

$$\lim_{j\to\infty}(x,u_j)=0,$$

从而说明 w-$\lim\limits_{j\to\infty}u_j=0$ (即 $u_n\xrightarrow{w}0$).

(2) 当 $\lambda\in\sigma_c(A)$ 时, $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在且无界, $\forall j,\exists y_j\in R(A-\lambda I)$, 使得

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}y_i\right\|\geqslant j\left\|y_j\right\|,\quad (y_i,y_j)=\delta_{i,j},$$

令 $\tilde{u}_j=(A-\lambda I)^{-1}y_j, u_j=\dfrac{\tilde{u}_j}{\|\tilde{u}_j\|}$, 则 $\|u_j\|=1$, $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 是一个非预紧集, 且有

$$\|(A-\lambda I)u_j\|=\frac{\|(A-\lambda I)\tilde{u}_j\|}{\|(A-\lambda I)^{-1}y_j\|}=\frac{\|y_j\|}{\|(A-\lambda I)^{-1}y_j\|}\leqslant\frac{1}{j}.$$

从而 $\lim\limits_{j\to\infty}(A-\lambda I)u_j=0$. 结合 (1) 和 (2) 便得, 存在 A 的对应 λ 的 Weyl 序列.

充分性. 若存在 A 的对应 λ 的 Weyl 序列 $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$, $\{u_j\}_{j=1,2,\cdots}$ 是非预紧的, 并且 $\lim\limits_{j\to\infty}(Au_j-\lambda u_j)=0$, 则 $\lambda\in\sigma(T)$. 下面只要证明 λ 不是 A 的有限重特征值即可. 如果 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 是无穷维的, 则有 $\lambda\in\sigma_e(T)$. 所以仅考虑 $\dim\mathrm{Ker}(T-\lambda I)<\infty$ 的情形.

如果 $\dim\mathrm{Ker}(T-\lambda I)=0$, 即没有特征函数, 则结论得证.

如果 $0<\dim\mathrm{Ker}(T-\lambda I)<\infty$, 则根据推论 4.4.5, 只需证明 $(T-\lambda I)$ 在 $[\mathrm{Ker}\,(T-\lambda I)]^\perp$ 上的限制 (记作 $T_\lambda=(T-\lambda I)|_{[\mathrm{Ker}(T-\lambda I)]^\perp\cap D(T))}$) 不存在有界逆.

设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ 是 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 的一组正交基, P_λ 是在 $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ 上的投影算子. $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ 也是 $\mathrm{Ran}\,P_\lambda$ 的一组正交基, 则

$$\|P_\lambda u_n\|^2=\sum_{i=1}^k|(u_n,\varphi_i)|^2,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\|P_\lambda u_n\|^2=0.$$

由于 $u_n\xrightarrow{w}0$, 所以

$$\|(I-P_\lambda)u_n\|^2=1-\|P_\lambda u_n\|^2\to 1.$$

设 $\overline{P}_\lambda=I-P_\lambda$ 是 P_λ 的正交补. 令 $v_n=\overline{P}_\lambda u_n\,\|\overline{P}_\lambda u_n\|^{-1}$, 则 $\|v_n\|=1$. 由于 $v_n\in D(T)$, 故当 $n\to\infty$ 时,

$$\|(T-\lambda I)v_n\|=\|(T-\lambda I)u_n\|\,\|\overline{P}_\lambda u_n\|^{-1}\to 0. \tag{4.4.9}$$

又由于 $\{u_n\}$ 是 Weyl 序列, 所以 $T-\lambda I$ 的逆是无界的. 由式 (4.4.9) 便得结论. □

对于一般的闭算子, 也有类似的结论.

定理 4.4.13 设 X 是 Hilbert 空间, A 是闭算子, 则 $W(A)\subset\sigma(A)$.

证明 设 $\lambda\in W(A)$, $\{u_n\}$ 是算子 A 对应于 λ 的 Weyl 序列, 令

$$v_n=\frac{(A-\lambda I)u_n}{\|(A-\lambda I)u_n\|},$$

则 $\|v_n\|=1$, $\{v_n\}\subset D((A-\lambda I)^{-1})$. 又因为 $(A-\lambda I)u_n\xrightarrow{s}0$, 所以对于任意大的 N, 存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时,

$$\|(A-\lambda I)^{-1}v_n\|=\|(A-\lambda I)u_n\|^{-1}>N.$$

故 $(A-\lambda I)^{-1}$ 是无界算子, $\lambda\in\sigma(A)$. □

定理 4.4.14 设 X 是 Hilbert 空间, A 是闭算子且 A 的正则集非空 ($\rho(A)\neq\varnothing$), 则 $W(A)\subset\sigma_{ess}(A)=\sigma_e(A)\cup\sigma_r(A)$, 并且 $\sigma_{ess}(A)$ 的边界包含在 $W(A)$ 内. 如果 $W(A)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的补集的每一个连通分支都包含算子 A 的正则点 ($\rho(A)$ 中的点), 则 $\sigma_{ess}(A)=W(A)$. 后一结论的逆命题也成立.

证明 (1) 设 $\lambda\in W(A)$, $\{u_n\}$ 是算子 A 对应于 λ 的 Weyl 序列. 如果 $\lambda\in\sigma_d(A)$, 则存在一个有限维的 A-不变子空间 H_λ. 设 P 是 H_λ 上的投影算子, $I-P$ 也是投影算子, 而且 $(I-P)u_n=w_n\xrightarrow{w}0$, $\|w_n\|\to 1$ $(n\to\infty)$, 从而 $(I-P)(A-\lambda I)=(A-\lambda I)(I-P)$ 是不可逆的. 于是 $\lambda\in\sigma(A(I-P))$, 与 $\lambda\in\sigma_d(A)$ 矛盾, 所以 $\lambda\in\sigma_{ess}(A)$.

(2) 如果 $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, 并且在边界上, 则存在序列 $\{z_n\} \subset \rho(A)$, 使得 $z_n \to \lambda\ (n \to \infty)$. 选取 $f \in H$, 使得对于所有的 n, $u_n = (A - z_n I)^{-1} f \neq 0$. 定义 $w_n = u_n \|u_n\|^{-1}$, 则 $\|w_n\| = 1$, 而且对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|z_n - z_N| < \varepsilon$. 因而 $\forall h \in H$,

$$
\begin{aligned}
(h, w_n) &= \|u_n\|^{-1}\{(h, (A - z_N I)^{-1} f) + (z_n - z_N)([(A - z_N I)^{-1}]^* h, u_n)\} \\
&\leqslant c_0 \|u_n\|^{-1} + \varepsilon c_1 < c\varepsilon,
\end{aligned}
$$

即 $w_n \xrightarrow{w} 0$. 所以

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda I) w_n = (A - z_n I) u_n \|u_n\|^{-1} + (z_n - \lambda) w_n, \\
&\|(A - \lambda I) w_n\| \leqslant \|f\| \, \|u_n\|^{-1} + |z_n - \lambda| \to 0\ (n \to \infty),
\end{aligned} \tag{4.4.10}
$$

也即 $(A - \lambda I) u_n \xrightarrow{s} 0$. 所以 $\{w_n\}$ 是算子 A 对应于 λ 的 Weyl 序列, 因此 $\lambda \in W(A)$.

(3) 设 $\sigma_{ess}(A) = W(A)$, 且设 $\mathbb{C} \backslash W(A) = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$, 其中 C_i 是连通的开集. 若 $C_i \cap \rho(A) = \varnothing$, 则 $C_i \subset \sigma(A)$. 从而 $C_i \cap \sigma_{ess}(A) \neq \varnothing$, 矛盾, 所以, 对于所有的 i, $C_i \cap \rho(A) \neq \varnothing$, 即每一个连通分支都含有 $\rho(A)$ 的点.

反之, 若 $C_i \cap \rho(A) \neq \varnothing$, 又因为 $\mathbb{C} \backslash W(A) \subset \mathbb{C} \backslash \partial\sigma_{ess}(A)$($\partial K$ 表示集合 K 的边界). 设 $\bigcup_i \tilde{C}_i = \mathbb{C} \backslash \partial\sigma_{ess}(A)$, 对于某个 i, $C_j \subset \tilde{C}_i$, 则 $\tilde{C}_i$ 包含 $\rho(A)$ 的点, 但是, $\tilde{C}_i$ 包含 $\operatorname{int} \sigma_{ess}(A)$, 故 $\operatorname{int} \sigma_{ess}(A) = \varnothing$, 即 $\sigma_{ess}(A) = W(A)$. □

第 5 章 J-对称算子和 J-自伴算子

本章研究定义在复的可分 Hilbert 空间上的一类无界 C-对称算子和 C-自伴算子, 即 J-对称算子和 J-自伴算子. 在本章中恒假设 X 是复的可分 Hilbert 空间, $T \in L(X)$ 是定义在 X 上的线性算子, T 不一定是有界的, 但 T 是 X 上的闭稠定线性算子, 即 $\overline{D(T)} = X$. 为了叙述方便, 特引入以下记号, 用 $R_\lambda(T) = R(\lambda I - T)$ 表示算子 $\lambda I - T$ 的值域, 用 $N_\lambda(T) = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ 表示算子 $\lambda I - T$ 的零空间, 或称算子 T 对应于 λ 的特征子空间.

5.1 J-对称算子的亏指数

5.1.1 算子的亏指数

设 X 是复的可分 Hilbert 空间, T 是定义在 X 上的闭稠定线性算子, 仍然用 $\Pi(T)$, $\rho(T)$ 和 $\sigma(T)$ 表示算子 T 的正则型域、正则集和谱集. 由定义 3.2.1 可知, $\rho(T) \subset \Pi(T)$. $\forall \lambda \in \Pi(T)$, $\exists K_\lambda > 0$, 使得对于任意的 $f \in D(T)$,

$$\|(T - \lambda I)f\| \geqslant K_\lambda \|f\|, \tag{5.1.1}$$

而且 $\Pi(T)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开集.

定理 5.1.1 设 X 是复的可分 Hilbert 空间, T 是定义在 X 上的闭稠定线性算子, 则

(1) $\lambda \in \Pi(T)$ 的充要条件是 $(\lambda I - T)$ 可逆, 且 $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant k_\lambda^{-1}$ (但不一定是有界算子);

(2) 若 T 是对称算子 (Hermite 算子), 则 $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \subset \Pi(T)$;

(3) 若 T 是等距的, 则 $\mathbb{C} \backslash \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} \subset \Pi(T)$.

证明 (1) 必要性. 若 $\lambda \in \Pi(T)$, 则由式 (5.1.1) 可知, 对 $\forall f \in D(T)$, $(\lambda I - T)$ 是双射, 而且 $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant k_\lambda^{-1}$, 所以 $(\lambda I - T)$ 可逆.

充分性. 若 $(\lambda I - T)$ 是双射, 并且 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界, 则 $\forall f \in D(T)$,

$$\|(\lambda I - T)f\| \geqslant \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1} \, \|f\|,$$

选取 $k_\lambda = \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$, 便得 $\lambda \in \Pi(T)$.

(2) $\forall\lambda = a + b\mathrm{i},\ b \neq 0$, 以及 $f \in D(T)$,

$$\|(\lambda I - T)f\|^2 = \|(aI - T)f\|^2 + b^2\|f\|^2 \geqslant b^2\|f\|^2,$$

所以 $\lambda \in \Pi(T)$ (选取 $k_\lambda = b$).

(3) 若 $|\lambda| \neq 1$, 则对任意的 $f \in D(T)$,

$$\|(\lambda I - T)f\| \geqslant \big|\|\lambda f\| - \|Tf\|\big| = \big|(1 - |\lambda|)\big|\ \|f\|,$$

选取 $K_\lambda = \big|1 - |\lambda|\big|$, 便得 $\lambda \in \Pi(T)$. □

定义 5.1.2 设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定线性算子, 称空间 $R(\lambda I - T)^\perp = R_\lambda(T)^\perp = X/R_\lambda(T) = X\Theta R_\lambda(T)$ 为算子 T 在 λ 处的亏子空间 (deficiency subspace), 称 $m(\lambda) = \dim R(\lambda I - T)^\perp$ 为算子 T 在点 λ 处的亏指数 (deficiency index/indices).

定理 5.1.3 设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定线性算子, 则算子 T 的亏指数在 $\Pi(T)$ 的每个连通分支中是常数. 特别地, 若 T 是对称算子, 则 T 在上下半平面的亏指数都是常数, 分别为 n_+ 和 n_-.

证明 只需证明 $m(\lambda)$ 在 $\Pi(T)$ 中某一局部为常数, 即对于任意的 $\lambda_0 \in \Pi(T)$, $\exists\varepsilon > 0$, 使得当 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 时, 有 $m(\lambda) = m(\lambda_0)$ 即可.

设 Q_λ 和 Q_{λ_0} 是 X 上的投影算子, 分别将 X 投影到 $\overline{R(\lambda I - T)}$ 和 $\overline{R(\lambda_0 I - T)}$ 上. 由 $\lambda,\ \lambda_0 \in \Pi(T)$, 令 $P_\lambda = I - Q_\lambda$, $P_{\lambda_0} = I - Q_{\lambda_0}$, 则 P_λ 与 P_{λ_0} 也是两个投影算子, 将 X 分别投影到 $R(\lambda I - T)^\perp$ 和 $R(\lambda_0 I - T)^\perp$ 上. 类似定理 3.2.12 的证明, 适当选取 $\varepsilon > 0$, 当 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 时,

$$\|P_\lambda - P_{\lambda_0}\| < 1,$$

由定理 3.2.9 可知 $m(\lambda) = m(\lambda_0)$.

当 T 是对称算子时, 上下半平面分别为 $\Pi(T)$ 的连通分支, 故在上下半平面其亏指数分别是常数 n_+ 和 n_-. □

令 $n(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \dim N_\lambda(T)$, 则 $n(\lambda)$, $m(\lambda)$ 称为算子 T 在点 λ 的特征 (characteristic). 若 $n(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 均为有限数, 称 T 的特征是有限的.

5.1.2 J-对称算子与 J-自伴算子的基本概念和性质

J-对称算子是 Glazman[60] 最先引进的一类特殊的 C-对称算子, Gdindo[47] 和 Knowles[73] 利用不同的方法证明了每一个 J-对称算子都存在一个 J-自伴扩张. 之后, 对于 J-自伴扩张的描述取得了很大进展, 特别地, Race[125] 在 Zhikhar[213] 和 Knowles[74] 工作的基础上得到 J-自伴域的一般刻画, 刘景麟[103] 和尚在久[145] 又

分别从不同角度完善了其描述. 关于 J-对称算子和 J-自伴算子的其他方面的研究近几十年来涌现出许多成果.

设 X 是复的可分 Hilbert 空间, J 表示 X 上的复共轭算子, 即 $\forall x, y \in X$,

$$(Jx, Jy) = (y, x),$$

而且具有如下性质:

(1)

$$J(x+y) = Jx + Jy; \tag{5.1.2}$$

(2)

$$J(\lambda x) = \overline{\lambda} Jx; \tag{5.1.3}$$

(3)

$$J^2 x = x. \tag{5.1.4}$$

定义 5.1.4　设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的稠定线性算子, 若 $\forall x, y \in D(T)$, 有

$$(Jx, Ty) = (JTx, y), \tag{5.1.5}$$

则称算子 T 是 J-对称算子 (C-对称算子).

由定义显然有 T 是 J-对称算子的充要条件是

$$JT \subset T^*J \quad (T \subset JT^*J, \text{ 或 } JTJ \subset T^*). \tag{5.1.6}$$

定义 5.1.5　如果

$$JT = T^*J \quad (T = JT^*J, \text{ 或 } JTJ = T^*), \tag{5.1.7}$$

则称算子 T 是 J-自伴算子 (C-自伴算子).

显然算子 J 是 X 上的一个共轭算子, J-对称算子和 J-自伴算子实际上分别是第 4 章中定义的 C-对称算子和 C-自伴算子.

定理 5.1.6　若 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称算子, 则 $n(\lambda) < m(\lambda)$.

证明　设 T 是 J-对称算子, 则 $JTJ \subset T^*$. 对于任意的 $h \in N_\lambda(T)$, 即当 $(T-\lambda I)h = 0$ 时, 有 $J(T-\lambda I)JJh = 0$, 即 $JTJ^2h - \overline{\lambda}Jh = 0$, 即 $(JTJ - \overline{\lambda}I)Jh = 0$, 从而

$$(T^* - \overline{\lambda}I)Jh = 0. \tag{5.1.8}$$

5.2　J-对称算子的扩张

设 X 是复的可分 Hilbert 空间, J 表示 X 上取共轭的算子, A 是定义在 X 上的闭稠定 J-对称线性算子. 若算子 B 是 A 的 J-对称延拓, 则 $A \subset B$, 而 $B \subset JB^*J$. 又由于 $B^* \subset A^*$, 所以,

$$A \subset B \subset JB^*J \subset JA^*J. \tag{5.2.1}$$

因此, A 的 J-对称延拓是 JA^*J 在 $D(JA^*J)$ 中某个含有 $D(A)$ 的子空间上的限制. 与对称算子的对称扩张一样, 要研究 J-对称算子 A 的扩张, 需要研究子空间 $D(JA^*J)$ 的结构. 为了便于刻画这一子空间, 在 $D(JA^*J)$ 上引入内积

$$(x,y)^* = (x,y) + (JA^*Jx, JA^*Jy), \quad \forall x,y \in D(JA^*J). \tag{5.2.2}$$

容易证明 $(D(JA^*J),(\cdot,\cdot)^*)$ 是一个 Hilbert 空间. 于是

$$D(JA^*TJ) = D(A) \oplus^* D(A)^{\perp *}. \tag{5.2.3}$$

定理 5.2.1　若 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称线性算子, 则

$$D(A)^{\perp *} = \mathrm{Ker}(A^*JA^*J + I). \tag{5.2.4}$$

证明　若 $y \in D(A)^{\perp *}$, 则 $\forall x \in D(A)$, $(x,y)^* = 0$, 即

$$0 = (x,y)^* = (x,y) + (JA^*Jx, JA^*Jy) = (x,y) + (Ax, JA^*Jy),$$

所以

$$(x,-y) = (Ax, JA^*Jy).$$

因此 $JA^*Jy \in D(A^*)$, 且 $A^*(JA^*Jy) = -y$. 故

$$D(A)^{\perp *} \subset \mathrm{Ker}(A^*JA^*J + I).$$

反之, 若 $z \in \mathrm{Ker}(A^*JA^*J + I)$, 则 $JA^*Jz \in D(A^*)$. 于是 $\forall x \in D(A)$, 有

$$(Ax, JA^*Jz) = (x, A^*JA^*Jz) = (x,-z),$$

因此,

$$\begin{aligned}(x,z)^* &= (x,z) + (JA^*Jx, JA^*Jz) = (x,z) + (Ax, JA^*Jz)\\ &= (x,z) + (x, A^*JA^*Jz) = 0,\end{aligned}$$

所以,

$$Jh \in N_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_{\lambda}^{\perp}(T), \tag{5.1.9}$$

因此, $\dim N_\lambda(T) \leqslant \dim R_\lambda^\perp(T)$, 即 $n(\lambda) < m(\lambda)$. □

注 若算子 T 是 J-自伴算子, 即 $JT = T^*J$, 则上述证明也是可逆的, 即反过来的不等式也成立, 也即 $n(\lambda) \geqslant m(\lambda)$. 所以, 对 J-自伴算子而言 $n(\lambda) = m(\lambda)$.

定理 5.1.7 定义在 Hilbert 空间 X 上的算子 T 是 J-自伴算子的充分必要条件是对 $\forall\lambda \in \Pi(T)$, 算子 T 在 λ 的亏指数 $m(\lambda) = 0$.

证明 必要性. 设算子 T 是 J-自伴算子, 即 $JTJ = T^*$. 若 $\exists\lambda \in \Pi(T)$, 使得 $m(\lambda) \neq 0$, 则由于 T 是 J-自伴算子, 所以 $n(\lambda) = m(\lambda)$, 从而得 $n(\lambda) \neq 0$, 即有 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 这与 $\lambda \in \Pi(T)$ 矛盾. 因此, $\forall\lambda \in \Pi(T)$, $m(\lambda) = 0$.

充分性. 若 $\forall\lambda \in \Pi(T)$, $m(\lambda) = 0$, 即有 $\overline{(T - \lambda I)D(T)} = X$, 不妨设

$$(T - \lambda I)D(T) = X,$$

于是

$$(JTJ - \overline{\lambda}I)D(T) = X. \tag{5.1.10}$$

若 $JTJ \neq T^*$, 则 $\exists f \in D(T)$, 使得 $f \notin D(TJT)$. 令

$$(T^* - \overline{\lambda}I)f = h. \tag{5.1.11}$$

根据式 (5.1.10) 可知, $\exists g \in D(T)$, $Jg \in D(JTJ) \subset D(T^*)$, 使得

$$(JTJ - \overline{\lambda}I)Jg = h. \tag{5.1.12}$$

又由于 T 是 J-对称算子, 所以式 (5.1.12) 可表示为

$$(T^* - \overline{\lambda}I)Jg = h. \tag{5.1.13}$$

根据式 (5.1.11) 和式 (5.1.13) 得

$$(T^* - \overline{\lambda}I)(Jg - f) = 0. \tag{5.1.14}$$

由 $N(T^* - \overline{\lambda}I) = R(T - \lambda I)^\perp$ 知, $n(\overline{\lambda}) = m(\lambda) = 0$, 因而式 (5.1.14) 成立的充要条件是 $Jg - f = 0$. 所以 $Jg = f$, 矛盾 (这是因为 $f \notin D(JTJ)$, 而 $Jg \in D(JTJ)$). 故 $JTJ = T^*$, 即 T 是 J-自伴算子. □

推论 5.1.8 若算子 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 J-自伴算子, 则 $\sigma_r(T) = \varnothing$.

推论 5.1.9 若算子 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 J-自伴算子, 则算子 T 的正则域和正则型域相同, 即 $\rho(T) = \Pi(T)$.

从而 $z \in D(A)^{\perp *}$, 即 $\mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I) \subset D(A)^{\perp *}$. □

定义 5.2.2 在 $D(JA^*J)$ 上引入双线性型符号 $\langle \cdot,\cdot \rangle$, 对于任意的 $x,y \in D(JA^*J)$,

$$\langle x,y \rangle = (x, A^*Jy) - (y, A^*Jx). \tag{5.2.5}$$

显然, $\langle x,y \rangle$ 是 $D(JA^*J)$ 上的一个双线性泛函, 而且满足

(1) $\langle x,y \rangle = -\langle y,x \rangle, \quad \forall x,y \in D(A)$;

(2) $\forall x \in D(A)$, $\langle x,x \rangle = 0$;

(3) A 是 J-对称算子 $\Leftrightarrow \langle x,y \rangle = 0, \quad \forall x,y \in D(A)$.

引理 5.2.3 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称算子, 则 $x \in D(A)$ 的充要条件是 $x \in D(JA^*J)$, 且 $\forall y \in D(JA^*J)$, 都有 $\langle x,y \rangle = 0$.

证明 必要性. $\forall y \in D(JA^*J)$, 有

$$\langle x,y \rangle = (x,A^*Jy) - (y,A^*Jx) = (Ax,Jy) - (JA^*Jx,Jy) = (Ax,Jy) - (Ax,Jy) = 0.$$

充分性. 设 $x \in D(JA^*J)$, 且 $\langle x,y \rangle = 0$ 对任意的 $y \in D(JA^*J)$ 都成立, 则

$$(x,A^*Jy) = (y,A^*Jx) = (JA^*Jx,Jy),$$

所以, $x \in D(A^{**}) = D(A)$(这是因为 A 是闭算子), 且 $Ax = A^{**}x = JA^*Jx$, 从而 A 是 J-对称算子. □

定理 5.2.4 设算子 B 是 Hilbert 空间 X 上闭稠定 J-对称算子 A 的扩张, 满足

$$A \subset B \subset JA^*J, \tag{5.2.6}$$

则存在唯一的子空间 $K \subset \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$, 使得

$$D(B) = D(A) \oplus^* K. \tag{5.2.7}$$

证明 记

$$K = \{z \in \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I) \mid \exists x \in D(B), \exists y \in D(A), \text{ 使得 } x = y + z\}. \tag{5.2.8}$$

容易验证, K 是 $D(JA^*J)$ 的一个子空间, 并且 $D(A) \oplus^* K \subset D(B)$.

另外, $\forall x \in D(B) \subset D(JA^*J)$, 都有分解 $x = x_1 + x_2$, 其中, $x_1 \in D(A)$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$, 由此可知 $x_2 \in K$, 所以,

$$D(B) \subset D(A) \oplus^* K. \tag{5.2.9}$$

从而式 (5.2.7) 成立, 并且 $Bx = Ax_1 + JA^*Jx_2$. □

定义 5.2.5 设子空间 $K \subset \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$, 称

$$K^* = \{u \in \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I) | \langle u, v\rangle = 0,\ v \in K\} \tag{5.2.10}$$

为子空间 K 的 J-共轭子空间. 若 $K \subset K^*$, 则称 K 为 J-对称的; 若 $K = K^*$, 则称 K 为 J-自伴的.

定理 5.2.6 设算子 B 是 J-对称算子 A 的 J-对称扩张, 满足 $A \subset B \subset JA^*J$ 和 $D(B) = D(A) \oplus^* K$, 则

(1) B 是 J-对称算子的充要条件是 K 是 J-对称的;

(2) B 是 J-自伴算子的充要条件是 K 是 J-自伴的.

证明 (1) 必要性. 若 B 是 J-对称算子, 则对 $\forall u, v \in K \subset D(B)$, $\langle u, v\rangle = 0$, 所以 $K \subset K^*$, 即 K 是 J-对称的.

充分性. 若 K 是 J-对称的, 即 $K \subset K^*$, 则对 $\forall x+u, y+v \in D(B)$, 有

$$\langle x+u, y+v\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, v\rangle + \langle u, y\rangle + \langle u, v\rangle = 0,$$

其中, $x, y \in D(B)$, $u, v \in K$. 所以 B 是 J-对称算子.

(2) 必要性. 设 B 是 J-自伴算子, 即 $B = JB^*J$, $D(B) = D(A) \oplus^* K$. 因为 B 是 J-对称算子, 所以 $K \subset K^*$, 而且对 $\forall v \in K^*$ 有

$$\langle u, v\rangle = 0, \quad u \in K.$$

对于任意的 $x \in D(A)$, $x+u \in D(B)$, 根据引理 5.2.3 可得

$$\langle x+u, v\rangle = 0,$$

即

$$(x+u, A^*Jv) = (v, A^*J(x+u)) = (JA^*J(x+u), Jv) = (B(x+u), Jv).$$

这说明 $Jv \in D(B^*)$, 且 $B^*Jv = A^*Jv$, 所以 $v \in D(JB^*J) = D(B) = D(A) \oplus^* K$, 而且, $v \in K$, 故 $K \supset K^*$.

充分性. 若 K 是 J-自伴的, 则 K 也是 J-对称的, 所以, B 是 A 的 J-对称扩张. 往证 B 是 J-自伴算子, 只需证明 $D(JB^*J) \subset D(B)$ 即可.

设 $z \in D(JB^*J) \subset D(JA^*J)$, 记 $z = y+v$, 其中, $y \in D(A)$, $v \in \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$. 因为 $Jz \in D(B^*)$, 所以对于任意的 $x+u \in D(B)$, 其中, $x \in D(A)$, $u \in K$, 有

$$(B(x+u), Jz) = (x+u, B^*Jz).$$

又由于 B 是 J-对称的, 故

$$\begin{aligned}(B(x+u),Jz)&=(JB^*J(x+u),Jz)=(JA^*J(x+u),Jz)\\&=(z,A^*J(x+u)).\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

另外, 又由

$$\begin{aligned}(x+u,B^*Jz)&=(JB^*Jz,J(x+u))=(JA^*Jz,J(x+u))\\&=(x+u,A^*Jz),\end{aligned}\tag{5.2.12}$$

以及式 (5.2.11) 得

$$\langle z,x+u\rangle=(z,A^*J(x+u))-(x+u,A^*Jz)=0,$$

即对于任意的 $x+u\in D(B)$,

$$\langle y+v,x+u\rangle=0,$$

其中, $x\in D(A)$, $u\in K$. 由此得

$$\langle u,v\rangle=0,$$

所以 $v\in K^*=K$, 因而 $z=y+v\in D(B)$. □

这样, 研究 J-对称算子 A 的扩张 B 的 J-对称性和 J-自伴性, 只需研究其相应子空间 K 的 J-对称性和 J-自伴性即可.

定理 5.2.7 复 Hilbert 空间 X 上的任何 J-对称算子都有 J-自伴扩张.

证明 根据定理 5.2.6 可知, 只需证明对于任何 J-对称算子 A 的 $\mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$ 中都存在 J-自伴子空间 K.

任取 $x\in\mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$, 令 $K_0=\mathrm{span}\{x\}$, 因为 $\langle x,x\rangle=0$, 所以 K_0 是 J-对称的. 考虑 $\mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$ 中所有包含 K_0 的 J-对称子空间按包含关系组成的半序集合, 显然它的任一个全序子集都有极大元, 由 Zorn 引理得此半序集合有最大元 K $(K_0\subset K\subset\mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I))$.

下证 K 是 J-自伴的. 若不然, 设 $x_0\in K^*\backslash K$, 令

$$K'=K\oplus^*\mathrm{span}\{x_0\}.$$

对于任意的 $x_1+\alpha x_0,x_2+\beta x_0\in K'$, 其中, $x_1,x_2\in K$, 有

$$\langle x_1+\alpha x_0,x_2+\beta x_0\rangle=\langle x_1,x_2\rangle+\alpha\langle x_0,x_2\rangle+\overline{\beta}\langle x_1,x_0\rangle+\alpha\overline{\beta}\langle x_0,x_0\rangle=0,$$

所以, K' 是 J-对称的, 与 K 是最大元矛盾, 故 K 是 J-自伴的. □

根据定理 5.2.7 可知, 与对称算子不同的是任何 J-对称算子都有 J-自伴扩张. 如何来刻画 J-对称算子的 J-自伴扩张, 首先需要清楚子空间 $D(JA^*J)$ 的结构.

定理 5.2.8　设 A 是 Hilbert 空间 X 上闭稠定 J-对称算子, $\Pi(A) \neq \varnothing$, $\forall \lambda_0 \in \Pi(A)$, 设 A' 是 A 的 J-自伴扩张, 而且满足 $\lambda_0 \in \Pi(A')$, 则

$$D(JA^*J) = D(A) \oplus (A' - \lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0} \oplus JN_{\lambda_0}, \tag{5.2.13}$$

其中

$$N_{\lambda_0} = \{x \in D(A^*) \mid (A^* - \overline{\lambda_0} I)x = 0\}. \tag{5.2.14}$$

证明　先证明 $D(A)$, $(A'-\lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0}$ 和 JN_{λ_0} 线性无关性. 设 $x+y+z=0$, 其中, $x \in D(A)$, $y \in (A'-\lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0}$, $z \in JN_{\lambda_0}$, 用 $(JA^*J - \lambda_0 I)$ 作用于 $x+y+z=0$ 两边可得

$$(JA^*J - \lambda_0 I)x + (JA^*J - \lambda_0 I)y + (JA^*J - \lambda_0 I)z = 0.$$

由于 A 是 J-对称算子, A' 是 A 的 J-自伴扩张, 所以, $A \subset A' \subset JA^*J$. 而 $\lambda_0 \in \Pi(A) \cap \Pi(A')$, 从而有

$$(A - \lambda_0 I)x + (A' - \lambda_0 I)y + J(A^* - \overline{\lambda_0} I)Jz = 0.$$

又由于 $z \in JN_{\lambda_0}$, 所以 $(A^* - \overline{\lambda_0} I)Jz=0$, 即有

$$(A' - \lambda_0 I)x + (A' - \lambda_0 I)y = 0,$$

即

$$(A' - \lambda_0 I)(x + y) = 0, \tag{5.2.15}$$

并且 $(A' - \lambda_0 I)z = 0$. 又因为 $\lambda_0 \in \rho(A') = \Pi(A')$, 所以, $z = 0$.

根据式 (5.2.15) 得

$$(A' - \lambda_0 I)x = -(A' - \lambda_0 I)y \in N_{\lambda_0} = R(A - \lambda_0 I)^{\perp},$$

而 $(A - \lambda_0 I)x \in R(A - \lambda_0 I)$, 所以

$$(A - \lambda_0 I)x = 0.$$

又因为 $\lambda_0 \in \Pi(A)$, 故 $x = 0$, 于是便有 $y = 0$, 线性无关性得证.

再证公式 (5.2.13). 由于 A 是 J-对称算子, A' 是 A 的 J-自伴扩张, 所以, $D(A) \subset D(JA^*J)$, $JN_{\lambda_0} \subset D(JA^*J)$, $(A' - \lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0} \subset D(A') \subset D(JA^*J)$, 因此

$$D(A) \oplus (A' - \lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0} \oplus JN_{\lambda_0} \subset D(JA^*J).$$

下证反包含关系. $\forall u \in D(JA^*J)$, 只需证 u 可以表示成

$$u = x + y + z$$

即可, 其中, $x \in D(A)$, $y \in (A' - \lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0}$, $z \in JN_{\lambda_0}$.

由于 A 是闭的 J-对称算子, 所以 $R_\lambda, R_{\overline{\lambda}}$ 均为闭集, 于是 $R_{\overline{\lambda}}^{\perp} = N_\lambda$. 因而 $X = R_\lambda \oplus N_\lambda$. 对于任意的 $v \in X$, 设 $v = v' + v''$, 其中, $v' \in R_\lambda$, $v'' \in N_\lambda$. $\forall u \in D(JA^*J)$, 因 $(JA^*J - \lambda_0 I)u \in X$, 所以有分解

$$(JA^*J - \lambda_0 I)u = u' + u'',$$

其中, $u' \in R_\lambda$, $u'' \in N_\lambda$. 故存在 $x \in D(A)$, 使得 $(A - \lambda_0 I)x = u'$. 由 $\lambda_0 \in \rho(A') = \Pi(A')$, 不妨设 $u'' = (A' - \lambda_0 I)y$(即 $y = (A' - \lambda_0 I)^{-1} u''$), 其中, $y \in D(A') \subset D(JA^*J)$, 于是

$$(JA^*J - \lambda_0 I)u = (A - \lambda_0 I)x + (A' - \lambda_0 I)y,$$

又 $A \subset A' \subset JA^*J$, 所以,

$$(JA^*J - \lambda_0 I)u = (JA^*J - \lambda_0 I)x + (JA^*J - \lambda_0 I)y,$$

即

$$(JA^*J - \lambda_0 I)(u - x - y) = 0,$$

$$J(A^* - \overline{\lambda_0} I)J(u - x - y) = 0,$$

也就是 $J(u - x - y) \in JN_{\lambda_0}$. 令 $z = u - x - y$, 则有 $u = x + y + z$, 其中, $x \in D(A)$, $y \in (A' - \lambda_0 I)^{-1} N_{\lambda_0}$, $z \in JN_{\lambda_0}$. □

由定理 5.2.8 可知, $(A' - \lambda_0 I)^{-1}$ 是一一映射, 而 N_{λ_0} 的维数为 $m(\lambda_0)$. 所以, $2m(\lambda_0) = \dim D(JA^*J)/D(A)$. 又商空间 $D(JA^*J)/D(A)$ 与 λ_0 的选取无关, 所以, 对 $\forall \lambda \in \Pi(A)$, 均有

$$m(\lambda) = m(\lambda_0) = \frac{1}{2} \dim D(JA^*J)/D(A). \tag{5.2.16}$$

我们可以由此定义 J-对称算子的亏指数.

定义 5.2.9 若 A 是 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称算子, 则称

$$\operatorname{def}(A) = d(A) = \frac{1}{2} \dim D(JA^*J)/D(A) = \frac{1}{2} \dim \operatorname{Ker}(A^*JA^*J + I) \tag{5.2.17}$$

为 J-对称算子 A 的亏指数.

由此可知, J-对称算子 A 是 J-自伴的当且仅当 A 的亏指数等于零.

推论 5.2.10　设算子 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称算子. 若 $\exists\lambda_0 \in \Pi(A)$, 使得 $m(\lambda_0) = 0$, 则对 $\forall\lambda \in \Pi(A)$, $m(\lambda) = 0$, 而且 A 是本质 J-自伴的.

定理 5.2.11(Race)　设 B 是定义在空间 X 上闭稠密 J-对称算子 A 的 J-自伴延拓 (扩张), $d(A) < \infty$, 则

$$\dim D(JA^*J)/D(B) = \dim D(B)/D(A). \tag{5.2.18}$$

证明　当 A 为 J-自伴时, $A = B = JA^*J$, 结论已然成立.

当 A 是非 J-自伴时, $A \subset B = JB^*J \subset JA^*J$, B 是 A 的真 J-自伴延拓. 由于 $d(A) < \infty$, 不妨设 $\dim D(B)/D(A) = m$, 于是 $D(B)$ 可以表示成 $D(A) \oplus^* K$, 其中, $K = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \subset \operatorname{Ker}(A^*JA^*J + I)$ 是 J-自伴的.

$\forall j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, 定义 A_j 如下:

$$\begin{cases} D(A_j) = D(A) \oplus^* \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_j\}, \\ A_j y = By, \quad y \in D(A_j), \end{cases}$$

则 A_j 是闭算子. 又因为 $A_j \subset A_{j+1}$, $A_j \neq A_{j+1}$, 所以, $A_j^* \neq A_{j+1}^*$, 且 $JA_j^*J \supset JA_{j+1}^*J$. 于是

$$B = JB^*J = JA_m^*J \subset JA_{m-1}^*J \subset \cdots \subset JA_1^*J \subset JA^*J,$$

所以

$$\dim D(JA^*J)/D(B) > m.$$

反之, 设 $\dim D(JA^*J)/D(B) = m'$, 而 $D(JA^*J) = D(B) \oplus^* \operatorname{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_{m'}\}$, 同样定义 B_j 如下:

$$\begin{cases} D(B_j) = D(B) \oplus^* \operatorname{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_j\}, \\ B_j y = JA^*Jy, \quad y \in D(B_j), \end{cases}$$

则 B_j 是闭算子. 由于 $B_j \subset B_{j+1}$, $B_j \neq B_{j+1}$, 所以 $B_j^* \neq B_{j+1}^*$, 且 $JB_j^*J \supset JB_{j+1}^*J$. 因此

$$JB_{m'}^*J \subset JB_{m'-1}^*J \subset \cdots \subset JB_1^*J \subset JB^*J = B.$$

由 $(JBJ)^* = JB^*J$, $(JAJ)^* = JA^*J$, 及 A, B 都是闭算子可知, JAJ 和 JBJ 也是闭算子. 所以,

$$JAJ = (JA^*J)^* = B_{m'}^* \subset B_{m'-1}^* \subset \cdots \subset B_1^* \subset B^* = JBJ,$$

故

$$l = \dim D(JBJ)/D(JAJ) \geqslant m'.$$

设 $\{z_1, z_2, \cdots, z_l\} \subset D(JBJ)$, 且模 $D(JAJ)$ 线性无关. 因为

$$D(JAJ) = \{u \in X \mid Ju \in D(A)\} = \{Jv \mid v \in D(A)\},$$
$$D(JBJ) = \{Jw \mid w \in D(B)\},$$

所以, 对于 $\forall w \in D(B)$, $Jw \in D(JBJ)$, 因而 $\exists v \in D(A)$, 使得

$$Jw = Jv + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j z_j,$$

即

$$w = v + \sum_{j=1}^{l} \overline{\alpha_j} Jz_j.$$

下证 $\{Jz_1, Jz_2, \cdots, Jz_l\}$ 模 $D(A)$ 线性无关. 若不然, 存在不全为零的 $b_1, b_2, \cdots, b_l$, 使得 $\sum\limits_{j=1}^{l} b_j Jz_j \in D(A)$, 即

$$\sum_{j=1}^{l} \overline{b_j} z_j = J\left(\sum_{j=1}^{l} b_j Jz_j\right) \in D(JAJ),$$

这与 $\{z_1, z_2, \cdots, z_l\}$ 模 $D(JAJ)$ 线性无关矛盾. 因此

$$m = \dim D(B)/D(A) \geqslant l \geqslant m' = \dim D(JA^*J)/D(B),$$

所以 $m = m'$, 即 $\dim D(B)/D(A) = \dim D(JA^*J)/D(B) = m = \operatorname{def}(A)$. □

当 J-对称算子 A 的亏指数是无穷时, 利用同样的办法可以证明上述结论同样成立.

定理 5.2.12 设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称线性算子, 并且 $m = \operatorname{def}(A) < \infty$, $D(A) \subset D \subset D(JA^*J)$, 则 D 是 A 的某个 J-自伴扩张算子的定义域的充要条件是存在 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, 使得

(1) $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 模 $D(A)$ 线性无关;

(2) $\langle x_j, x_k \rangle = 0, \quad j, k = 1, 2, \cdots, m$;

(3) $D = \{x \in D(JA^*J) | \langle x, x_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m\}$.

证明　必要性. 设 D 是 J-对称算子 A 的 J-自伴延拓算子 B 的定义域, 则存在 J-自伴的 $K\subset \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$, 使得

$$D=D(A)\oplus^* K.$$

根据定理 5.2.11 知 $\dim K=m$. 设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 是 K 的基, 则可得条件 (1) 成立; 条件 (2) 由 K 的 J-自伴性可得; 而且

$$y\in D\Leftrightarrow y=y_1+y_2,\quad y_1\in D(A),\quad y_2=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j\in K \tag{5.2.19}$$

$$\Leftrightarrow y=y_1+y_2,\quad y_1\in D(A),\quad \langle y_2,x_j\rangle=0,\ j=1,2,\cdots,m \tag{5.2.20}$$

$$\Leftrightarrow y\in\{x\in D(JA^*J)\mid \langle x,x_j\rangle=0,\quad j=1,2,\cdots,m\}. \tag{5.2.21}$$

充分性. 设 x_j $(j=1,2,\cdots,m)$ 在 $(D(JA^*J),(\cdot,\cdot)^*)$ 中的直和分解是 $x_j=x_{j0}+\tilde{x_j}$, 其中, $x_{j0}\in D(A)$. 由条件 (1) 知, $\{\tilde{x_1},\tilde{x_2},\cdots,\tilde{x_m}\}$ 线性无关. 令 $K=\mathrm{span}\{\tilde{x_1},\tilde{x_2},\cdots,\tilde{x_m}\}$. 由条件 (2) 可得 K 是 J-对称的. 由于 K 总可以扩张成一个 J-自伴子空间 K_1, 所以 $\dim K_1\geqslant \dim K=m=\mathrm{def}(A)$. 若 $D(A)\oplus^* K_1$ 是 A 的某一个 J-自伴延拓的定义域, 则应有

$$\mathrm{def}(A)=\dim(D(A)\oplus^* K_1)/D(A)=\dim K_1,$$

所以 $K=K_1$, 即 K 是 J-自伴的, 而且

$$D(A)\oplus^* K=\{x\in D(JA^*J)\mid \langle x,\tilde{x_j}\rangle=0,\quad j=1,2,\cdots,m\}.$$

所以 D 是 J-对称算子 A 的某 J-自伴延拓算子 B 的定义域, 即 $By=Ay_1+JA^*Jy_2$, 其中, $y=y_1+y_2$, $y_1\in D(A)$, $y_2\in K\subset \mathrm{Ker}(A^*JA^*J+I)$. □

5.3　J-对称微分算子的 J-自伴扩张

利用 5.2 节的结论, 给出二阶和高阶 J-对称微分算子的 J-自伴扩张的描述. 本节将考虑 $[0,\infty)$ 上复系数的 n 阶 $(n=2r\geqslant 2)$$J$-对称微分算式

$$l(y)=\sum_{k=0}^{r=\frac{n}{2}}(-1)^k(p_k(x)y^{(k)})^{(k)} \tag{5.3.1}$$

在 $L^2[0,\infty)$ 上所生成的 J-对称算子的亏指数以及 J-自伴扩张问题, 其中, 系数 $p_k(x)$ 是定义在区间 $[0,\infty)$ 上的复值函数, 并且至少具有直到 k 阶的导数, $p_0(x)$,

$p_1(x), \cdots, p_{r-1}(x), p_r^{-1}(x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 的任何紧子集上 Lebesgue 可积. 称

$$l^+(y) = \sum_{k=0}^{r=\frac{n}{2}} (-1)^k (\overline{p_k(x)} y^{(k)})^{(k)} \tag{5.3.2}$$

为微分算式 (5.3.1) 的共轭算式.

令 D_M 表示 $L^2[0,\infty)$ 内满足下述性质的函数所组成的线性流形:

(1) $y^{[n-1]}(x)$ 在 $[0,\infty)$ 的任何紧子集上绝对连续;

(2) $l(y) = y^{[n]} \in L^2[0,\infty)$, 其中, $y^{[n]}$ 表示 y 的拟导数,

$$\begin{aligned} &y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = 0, 1, \cdots, r-1, \\ &y^{[r]} = p_r y^{(r)}, \\ &y^{[r+k]} = p_{r-k} y^{(r-k)} - (y^{[r+k-1]})', \quad k = 1, \cdots, r. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

称 D_M 为式 (5.3.1) 的最大算子域, 相应地式 (5.3.1) 以 D_M 为定义域所生成的算子记为 L_M, 称为式 (5.3.1) 所生成的最大算子. 以 D_0' 表示 D_M 满足如下条件的子集: $y \in D_M$, 并且 y 在 $[0,\infty)$ 的某紧子集外为 0. 式 (5.3.1) 以 D_0' 为定义域所生成的算子记为 L_0', 容易证明 D_0' 在 $L^2[0,\infty)$ 中是稠密的, 而且 L_0' 是 J-对称的. 用 L_0 表示 L_0' 的闭包, 即 $L_0 = \overline{L_0'}$, D_0 表示 L_0 的定义域, 容易验证 L_0 是 $L^2[0,\infty)$ 中的闭稠定 J-对称算子, L_0 称为式 (5.3.1) 所生成的最小算子.

同样, 可以定义由式 (5.3.2) 生成的最大算子 L_M^+ 和最大算子域 D_M^+, 以及闭稠定 J-对称最小算子 L_0^+ 和最小算子域 D_0^+.

容易验证, D_0 的解析描述为

$$D_0 = \left\{ y \in D_M \mid [y,z](0) = \lim_{b\to\infty} [y,z](b) = [y,z](\infty) = 0, \quad \forall z \in D_M \right\}, \tag{5.3.4}$$

其中 $[y,z](x)$ 是关于 $l(y)$ 的 Langrange 双线性型, 满足

$$\int_0^\infty l(y)\overline{z}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty y\overline{l(z)}\,\mathrm{d}x = [y,z]_0^\infty. \tag{5.3.5}$$

而且容易验证如下关系式:

$$L_0^* = L_M^+, \quad (L_0^+)^* = L_M, \quad L_0 \subset J L_M J, \quad L_0^+ \subset J L_M^+ J. \tag{5.3.6}$$

采用类似定理 3.1.21 的证明同样可以得到, $[0,\infty)$ 上复系数的 n 阶 ($n = 2r \geqslant 2$)J-对称微分算式 (5.3.1) 生成的最小算子 L_0 的亏指数 $\operatorname{def} L_0 = m$ 恰等于方程 $l^+l(y) = -y$ 线性独立解个数的一半, 满足 $r \leqslant m \leqslant 2r = n$[125].

设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \cdots, \varphi_{2m}$ 是方程 $l^+l(y) = -y$ 的一组属于 $L^2[0,\infty)$ 的线性独立解, 满足 $\varphi_j, l(\varphi_j) \in L^2[0,\infty)$, $j = 1, 2, \cdots, 2m$.

定理 5.3.1[145] 对于 $[0,\infty)$ 上复系数的 n 阶 $(n = 2r \geqslant 2)$$J$-对称微分算式 (5.3.1), 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定 J-对称算子, 设其亏指数 $m = n = 2r$. 如果 M, N 是 $n \times n$ 矩阵, 满足条件:

(1) $\text{rank}(M \oplus N) = n$,

(2) $NJN^{\text{t}} + MQ^{-1}(0)M^{\text{t}} = 0$,

则 D_M 内由边条件

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} [y, \varphi_1](\infty) \\ [y, \varphi_2](\infty) \\ \vdots \\ [y, \varphi_n](\infty) \end{pmatrix} = 0$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y \in D(L)$$

是一个 J-自伴微分算子, 其中, 矩阵 J 和 $Q(x)$ 同定理 3.1.21 中类似, 是由 J-对称微分算式 (5.3.1) 所确定的矩阵和契合矩阵. 反之, 任何由 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域都具有上述形式.

定理 5.3.2[145] 对于 $[a,b]$ 上复系数的 n 阶 $(n = 2r \geqslant 2)$$J$-对称微分算式 (5.3.1), 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定 J-对称算子, 如果 M, N 是 $n \times n$ 矩阵, 满足条件:

(1) $\text{rank}(M \oplus N) = n$,

(2) $NE_aN^{\text{t}} + ME_bM^{\text{t}} = 0$,

则 D_M 内由边条件

$$M \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(b) \end{pmatrix} = 0 \tag{5.3.7}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y \in D(L)$$

是一个 J-自伴微分算子, 其中矩阵 E_a 和 E_b 同定理 3.1.21 中类似, 是由 J-对称微分算式 (5.3.1) 所确定的契合矩阵, $E_a = Q^{-1}(a)$, $E_b = Q^{-1}(b)$. 反之, 任何由 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域都具有上述形式.

推论 5.3.3[125] 对于 $[0,\infty)$ 上复系数的 2 阶 J-对称微分算式

$$l(y) = -(p(x)y')' + q(x)y, \tag{5.3.8}$$

其中 $p(x), q(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的复值函数, 且 $p^{-1}(x), q(x)$ 在 $[0,\infty)$ 的任何紧子集上 Lebesgue 可积. 由 $l(y)$ 生成的最小算子 L_0 是闭稠定 J-对称算子, 其亏指数 m 满足 $1 \leqslant m \leqslant 2$, 即 $m=1$ 或 $m=2$.

1) 当 $m=1$ 时, J-对称微分算式 (5.3.8) 称为极限点型的 (limit point), 此时 D_M 内由边条件

$$\cos\alpha\, y(0) + \sin\alpha\, y'(0) = 0 \tag{5.3.9}$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y \in D(L) \tag{5.3.10}$$

是一个 J-自伴微分算子. 反之, 任何由 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域都具有上述形式.

2) 当 $m=2$ 时, 对称微分算式 (5.3.8) 称为极限圆型的 (limit circle), 如果 M, N 是 2×2 矩阵, 满足条件

(1) $\operatorname{rank}(M \oplus N) = 2$,

(2) $NJN^{\mathrm{t}} + MQ^{-1}(0)M^{\mathrm{t}} = 0$,

其中 $J = Q^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 D_M 内由边条件

$$M\begin{pmatrix} y(0) \\ p(0)y'(0) \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} [y,\varphi_1](\infty) \\ [y,\varphi_2](\infty) \end{pmatrix} = 0$$

所界定的线性流形 $D(L)$ 为 L_0 所生成的 J-自伴算子 L 的 J-自伴域, 即

$$Ly = l(y), \quad y \in D(L)$$

是一个 J-自伴微分算子. 反之, 由 L_0 所生成的任何 J-自伴算子 L 的 J-自伴域都具有上述形式.

5.4 J-对称算子 J-自伴扩张的谱

设算子 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的闭稠定 J-对称算子. 根据 5.3 节的结论可知, 若 $\operatorname{def}(A) < \infty$, 则 A 存在 J-自伴扩张 B. B 是 J-自伴算子, 并且 $\sigma_r(B) = \varnothing$. 由 3.2 节的结论有如下命题.

命题 5.4.1　Hilbert 空间 X 上的任何 J-对称线性算子 A 的正则型域是开集.
记 Hilbert 空间 X 上的任何 J-对称线性算子 A 的谱核为 $\sigma_k(A)$, 即

$$\sigma_k(A) = \mathbb{C}\backslash\Pi(A), \tag{5.4.1}$$

则

(1) 因 $\rho(A) \subset \Pi(A)$, 故 $\sigma_k(A) \subset \sigma(A)$, 即谱核是谱的一部分, 一般地, $\sigma_k(A) \neq \sigma(A)$;

(2) 当 A 是 J-自伴算子时, 由于 $\sigma_r(A) = \varnothing$, 所以, $\rho(A) = \Pi(A)$ 且 $\sigma(A) = \sigma_k(A)$, 即对 J-自伴算子而言, 正则域与正则型域是相同的, 谱核与谱是重合的;

(3) 由谱核的定义可知, 对于 J-对称算子 A, A 的所有特征值均属于 A 的谱核, 即 $\sigma_p(A) \subset \sigma_k(A)$, 而使 $(A - \lambda I)^{-1}$ 存在且无界的点 λ 也属于 A 的谱核, 称为谱核的连续部分, 即 A 的连续谱也属于谱核, 所以 $\sigma_k(A)$ 中的点分为两类, 要么属于点谱, 要么属于连续谱;

(4) 若 A' 是 J-对称算子 A 的 J-对称扩张, 则由正则型域 $\Pi(A)$ 的定义可知, $\Pi(A) \supset \Pi(A')$, 从而 $\sigma_k(A') \supset \sigma_k(A)$. 所以, A' 的谱核的每一部分都包含 A 的谱核的相应部分;

(5) 若 A' 是 J-对称算子 A 的 J-自伴扩张, 则 $\sigma_k(A) \subset \sigma_k(A') = \sigma(A')$.

定理 5.4.2　对于 Hilbert 空间 X 上具有有限亏指数的稠定 J-对称算子 A, 它的 J-对称扩张不改变它的连续谱; 对于有有限亏指数的闭稠定 J-对称算子 A, 它的所有 J-自伴扩张具有相同的连续谱.

证明　设 A' 是 J-对称算子 A 的 J-对称扩张, 则 $D(A') \supset D(A)$, $D(A')/D(A)$ 是有限维的, 而且 $(A' - \lambda I)D(A')/(A - \lambda I)D(A)$ 也是有限维的, 所以, $(A' - \lambda I)^{-1}$ 与 $(A - \lambda I)^{-1}$ 同时有界, 或同时无界 (有限维空间上的算子一定是有界算子). 故 A' 与 A 的连续谱是相同的, 即 $\sigma_c(A') = \sigma_c(A)$. 由上面证明也可证得后一结论. □

定理 5.4.3　设 A 是 J-对称算子, 其亏指数 $\mathrm{def}(A) = m < \infty$, A' 是 A 的 J-自伴扩张, 则 $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A')$, 且其每个特征值的重数增加不超过 m. 特别地, 新的特征值的重数不大于 m.

证明　(1) 先证 $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A')$.

若 A' 是 A 的 J-自伴扩张, 即 $A \subset A'$, 则对任意的 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 存在不为零的 $x \in D(A)$, 使得

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

因 $A \subset A'$, 所以 $x \in D(A')$, 且

$$(A' - \lambda I)x = 0.$$

故

$$\lambda \in \sigma_p(A').$$

(2) 设 A' 是 A 的 J-自伴扩张, λ 是算子 A 的 p 重特征值. 用 $p+q$ 表示算子 A' 的特征值重数, 并设 $q > m$, 则存在关于 λ 的 $p+q$ 个线性无关的特征函数

$$x_1, x_2, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_{p+q},$$

使得当 $k = 1, 2, \cdots, p$ 时, $x_k \in D(A)$. 由定理 5.2.11 知 $D(A')$ 模 $D(A)$ 的维数等于 m, 又 $q > m$, 故存在不全为零的 q 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$, 使得

$$\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots \alpha_q x_{p+q} \in D(A),$$

但是函数

$$x = \alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots \alpha_q x_{p+q}$$

是算子对应于 λ 的特征向量, 它们与 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 线性无关, 这与算子 A 的特征值 λ 的重数为 p 矛盾.

(3) 假设新的特征值 λ 的重数大于 m, 则存在不为零的 $x \in D(A)$, 使得

$$(A' - \lambda I)x = 0.$$

于是, 对应于 λ, 至少有 $m+1$ 个线性无关的特征函数 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$. 因此, x 可用 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ 线性表示. 这与 $\dim D(A')/D(A) = m$ 矛盾, 故新的特征值的重数不大于 m. □

定理 5.4.4 具有有限亏指数的 J-对称算子 A 的 J-自伴扩张 A' 与 A 有相同的本质谱.

证明 由定理 5.4.3 可推出 J-自伴扩张后其无穷维特征值没有改变, 再根据定理 5.4.2 就可得 A 与 A' 有相同的本质谱, 即 $\sigma_e(A) = \sigma_e(A')$. □

定理 5.4.5 对具有有限亏指数的 J-对称算子 A 的任何 J-自伴扩张 A', 新增的特征值 $\lambda \in \sigma_p(A') \backslash \sigma_p(A)$, 都有 $\lambda \in \sigma_r(A)$.

证明 对任意的 $\lambda \in \rho(A')$, 都有 $\lambda \in \Pi(A')$, 即 $\rho(A') \subset \Pi(A')$, 故

$$\sigma_k(A') \subset \sigma(A'). \tag{5.4.2}$$

设 $\lambda \in \Pi(A')$, 则算子 $(A' - \lambda I)^{-1}$ 存在且有界. 又 A' 为 J-自伴算子, 所以, $(A' - \lambda I)^{-1}$ 的定义域为全空间, 即

$$R(A' - \lambda I) = X,$$

因此,

$$\lambda \in \rho(A').$$

即

$$\Pi(A') \subset \rho(A'),$$

并且

$$\sigma(A') \subset \sigma_k(A'). \tag{5.4.3}$$

由式 (5.4.2) 和式 (5.4.3) 得 $\sigma_k(A') \subset \sigma(A')$.

因为

$$\sigma_k(A) \subset \sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A),$$

又 A' 为 J-自伴算子, $\sigma_k(A') = \sigma(A')$, $\sigma_r(A') = \varnothing$, 所以

$$\sigma_k(A') = \sigma(A') = \sigma_p(A') \cup \sigma_c(A').$$

由谱核的定义容易得到

$$\sigma_k(A') = \sigma_k(A).$$

根据定理 5.4.3 有 $\sigma_p(A) = \sigma_p(A')$, 又由定理 5.4.2 的证明可以看出 $\sigma_c(A) = \sigma_c(A')$. 所以,

$$\sigma(A') = \sigma_k(A') \subset \sigma_k(A) \cup \sigma(A).$$

综上所述, J-自伴扩张后新增的特征值属于原来 J-对称算子 A 的剩余谱. □

5.5 J-自伴微分算子的谱

5.5.1 历史背景

J-自伴微分算子的谱理论的研究, 始于人们对耗散问题和具有复势能的 Schrödinger 问题的研究. Simes[149] 首先利用Weyl[204] 的方法研究了复系数 Sturm-Liouville 问题, 得到了类似实系数 Sturm-Liouville 问题的结论. 这是微分算子理论产生以来, 第一位数学家对复系数非自伴 (J-自伴) 微分算子的谱作了较为系统的研究. 其后, 前苏联数学家 Lidskii[91~93], Levitan[88], 英国数学家 McLeod[117,118] 等, 在不同程度上进行了研究, 给出了 J-自伴微分算子的谱的离散性 (预解算子的

全连续性) 的一些结论, 同时得到了 J-自伴微分算子的谱分析和特征理论. 进入 20 世纪 80 年代, Race 不仅研究了 J-对称微分算子的 J-自伴扩张问题和亏指数问题, 而且利用多种方法对二阶和高阶 J-自伴微分算子的谱分析和特征理论作了较为全面的研究, 也可以称为是在历史上第二位全面研究 J-对称微分算子的数学工作者. 日本的 Kamimura[67], 法国的 Fleckinger[36], 英国的 Edmunds 和 Evans[20] 等数学工作者也在不同程度上进行了较为深入的研究.

J-自伴微分算子的谱理论的研究, 方法上类似于自伴微分算子的谱理论的研究, 采用算子方法、分析方法、预解算子方法以及直和分解、算子方法和分析方法结合使用等.

分析方法是根据解析函数理论, 通过分析预解式, 函数和常微分方程解的渐近性质来判断微分算子谱的性质. 这方面工作以 Titchmarsh[160,162] 和 Levitan[86] 为代表, 在他们的经典著作中, 可以看到, 这种硬分析的方法在谱的定性分析中所表现出的高度技巧性和工作的艰巨性. 即使对于高阶的微分算子, 分析方法也是很奏效的, 20 世纪四、五十年代, 苏联的数学家 Naimark, Glazman, Lidskii 和 Levitan 等, 采用分析方法得到了许多令人振奋的结论[59,124,156], 大大地推动了微分算子谱理论研究的迅速发展, 尤其是在高阶微分算子领域里, 谱理论研究成果大量涌现出来, 这些成果不仅使数学工作者感到兴奋, 而且应用到现代物理学中也令物理工作者深感兴趣.

用算子理论的方法作微分算子谱的定性分析, 是近几十年来广泛采用的方法, 它在某种程度上接近于数学物理中的直接方法[15], 因此也称为微分算子谱的定性分析的直接方法. 在 Naimark, Glazman, Müller-Pfeiffer, Edmunds 与 Evans, Eastham 与 Kalf 关于微分算子谱分析的专著里, 使用的都是线性算子的方法[7,18,20,59,122,124]. 这种方法的理论基础是 Hilbert 空间中闭线性算子的谱理论和关于全连续摄动理论[17,68,204], 其主要出发点有两个, 一是分解的方法, 另一是二次型比较的方法. 这些目前为人熟知的方法是近几十年来由 Courant, Rellich, Friedrichs 和 Glazman 创立并逐步完善起来的.

近几十年来, 人们有效地利用上述几种方法研究了微分算子的谱, 对某些微分算子的谱作了定性和定量的研究, 获得了特别精细而且丰富的结论[156]. 这些方法也被广泛地应用到非自伴微分算子谱的定性和定量的研究中, 使得研究工作更加精细[192], 得到的结果也备受物理学家和现代科技工作者的关注.

5.5.2 基本引理和相关不等式

为了便于研究, 将式 (5.3.1) 改为如下形式:

$$lu(x)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left([a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)]u^{(k)}(x)\right)^{(k)},\quad x\in[0,\infty), \tag{5.5.1}$$

其中 $a_k(x), b_k(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数, 即式 (5.3.1) 中的 $p_k(x) = a_k(x) + ib_k(x)$.

以下根据式 (5.5.1) 的系数研究由式 (5.5.1) 生成的 J-自伴微分算子的本质谱和离散谱. 设 T_0' 是由式 (5.5.1) 生成的 J-对称微分算子, 类似式 (5.3.1) 所定义.

为了在 5.5.3 小节研究 J-自伴微分算子的谱, 在此引入如下结论.

引理 5.5.1[122] 若 $l > k \geqslant 0$, $1 < p < \infty$, 则空间 $W_p^l(x_1, x_2)$ $(-\infty \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \infty)$ 被连续嵌入空间 $C^k(x_1, x_2)$ 中, 而且对 $\varepsilon > 0$, 存在常数 C_ε, 使得

$$\|u\|_{C^k(x_1,x_2)} \leqslant \varepsilon\|u^{(l)}\|_{L^p(x_1,x_2)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^p(x_1,x_2)}$$

对所有的 $u(x) \in W_p^l(x_1, x_2)$ 成立. 若 (x_1, x_2) 是有限区间, 则由空间 $W_p^l(x_1, x_2)$ 到空间 $C^k(x_1, x_2)$ 的嵌入是紧致的.

引理 5.5.2[122] 设 $p(x), q(x)$ 是定义在 $\omega = [x_1, x_2]$ 上的实值函数, $|\omega| = x_2 - x_1$, $p(x) \geqslant 0$, $p^{-1}(x)$, $q(x)$ 在 ω 上可积. 若 $q(x) \geqslant 0$ $(q(x) \leqslant 0)$, 则

$$\int_\omega \left(p(x)|u'|^2 + q(x)|u|^2\right) \mathrm{d}x \geqslant \mu_\omega \left(1 + |\omega|\mu_\omega \int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x\right)^{-1} \|u\|_\omega^2,$$

其中, $\mu_\omega = \dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega q(x)\ \mathrm{d}x$, $u(x) \in C^1[x_1, x_2]$, $\|u\|_\omega^2 = \displaystyle\int_\omega |u|^2\ \mathrm{d}x$. 在 $q(x) \leqslant 0$ 的情形, 需取充分小的 $|\omega|$, 使得 $\left(\displaystyle\int_\omega |q(x)|\ \mathrm{d}x\right)\left(\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x\right) < 1$.

证明 设 $\rho(x) \in C^1[x_1, x_2]$ 是实值函数并且在 $[x_1, x_2]$ 内有一个零点 x_0, 根据 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\rho^2(x) &= \left(\int_{x_0}^x \rho'(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_{x_0}^x p^{-1}(t)\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_{x_0}^x p(t)[\rho'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right)\\ &\leqslant \left(\int_\omega p^{-1}(t)\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[\rho'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

不等式两边积分, 有

$$\|\rho\|_\omega^2 \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[\rho'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right).$$

设 $u(x) = v(x) + iw(x) \in C^1[x_1, x_2]$ 是复值函数, 并且在 $[x_1, x_2]$ 内 $|u(x)|$ 取最小值点处的函数值记为 $u_0 = v_0 + iw_0$, 则

$$\int_\omega (v(x) - v_0)^2\ \mathrm{d}x \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[v'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right),$$
$$\int_\omega (w(x) - w_0)^2\ \mathrm{d}x \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[w'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right),$$

所以

$$\int_\omega |u(x)-u_0|^2\ \mathrm{d}x \leqslant |\omega| \left(\int_\omega p^{-1}(t)\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[u'(t)]^2\ \mathrm{d}t\right).$$

当 $q(x)\geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_\omega (p(x)|u'|^2+q(x)|u|^2)\ \mathrm{d}x\\ \geqslant&\left(|\omega|\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x\right)^{-1}\|u-u_0\|_\omega^2+\mu_\omega\|u_0\|_\omega^2\\ =&\frac{\mu_\omega}{1+\delta^2}\left[\delta^2\left(|\omega|\mu_\omega\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x\right)^{-1}(1+\delta^{-2})\|u-u_0\|_\omega^2+(1+\delta^2)\|u_0\|_\omega^2\right],\end{aligned}$$

选取 $\delta^2=|\omega|\mu_\omega\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x$, 并应用不等式

$$\|u\|_\omega^2\leqslant(1+\delta^{-2})\|u-u_0\|_\omega^2+(1+\delta^2)\|u_0\|_\omega^2,$$

立得结论. 当 $q(x)\leqslant 0$ 时, 考虑 $|u(x)|$ 取最大值点处的函数值记为 $u_0=v_0+\mathrm{i}w_0$, 利用同样的方法可以得到结论. 定理得证. □

当 $q(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上变号时, 利用以上结论及相同方法可得如下结论.

设 $p(x),q(x)$ 是定义在 $\omega=[x_1,x_2]$ 上的实值函数 $|\omega|=x_2-x_1$, $p(x)\geqslant 0$, $p^{-1}(x)$, $q^+(x)=\max\{0,q(x)\}$, $q^-(x)=\min\{0,q(x)\}$ 在 $\omega=[x_1,x_2]$ 上可积. 令 $\mu_\omega(q)=\dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega q(x)\ \mathrm{d}x$, $\mu_\omega(q^-)=\dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega q^-(x)\ \mathrm{d}x$, $\mu_\omega(q^+)=\dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega q^+(x)\ \mathrm{d}x$, 则对 $u(x)\in C^1[x_1,x_2]$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\omega (p|u'|^2+q|u|^2)\ \mathrm{d}x\\ \geqslant&\frac{\mu_\omega(q)+4|\omega|\mu_\omega(q^-)\mu_\omega(q^+)\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x}{\left(1+2|\omega|\mu_\omega(q^-)\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x\right)\left(1+2|\omega|\mu_\omega(q^+)\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\ \mathrm{d}x\right)}\|u\|_\omega^2.\end{aligned}$$

如果 $p(x)\equiv h=\mathrm{const}$, $q(x)=-s(x)$, 则上面不等式可表示为如下形式:

$$\left|\int_\omega s(x)|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right|\leqslant h\|u'\|_\omega^2+\frac{\mu_\omega(s)+4h^{-1}|\omega|^2\mu_\omega(s^-)\mu_\omega(s^+)}{(1-2h^{-1}|\omega|^2\mu_\omega(s^-))\,(1-2h^{-1}|\omega|^2\mu_\omega(s^+))}\|u\|_\omega^2.$$

5.5.3 常系数 J-对称微分算子及其相关摄动的本质谱

本小节利用分析和算子的方法研究常系数 J-对称微分算子及其相关摄动的本质谱的存在区域.

定理 5.5.3　在式 (5.5.1) 中, 若系数 $a_k(x), b_k(x)$ 都是常数, 即 $a_k(x) = a_k$, $b_k(x) = b_k$, 且 $a_n, b_n > 0$, 则由式 (5.5.1) 生成的算子 T_0 是 J-对称算子, 其任何 J-自伴扩张的本质谱相同, 而且

$$\sigma(T_0) \subset A = \{\lambda = a + \mathrm{i}b \mid |a \in [\Lambda_1, \infty),\ b \in [\Lambda_2, \infty)\} \subset \mathbb{C}, \tag{5.5.2}$$

其中,

$$\Lambda_1 = \inf_{0<\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^{2k}, \quad \Lambda_2 = \inf_{0<\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \zeta^{2k}. \tag{5.5.3}$$

证明　由 Race[125,128] 知, T_0 具有 J-自伴扩张, 而且所有 J-自伴扩张的本质谱相同, 等于算子 T_0 的本质谱 $\sigma(T_0)$. $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$ 作一次 Fourier 变换[122]

$$\hat{\varphi}(\zeta) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\zeta} \varphi(x) \mathrm{d}x, \tag{5.5.4}$$

Fourier 变换在 $L_2(-\infty, \infty)$ 上等距同构, 而且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\zeta)|^2 \ \mathrm{d}\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \ \mathrm{d}x, \tag{5.5.5}$$

$$(-\mathrm{i})^k \hat{\varphi}^{(k)}(\zeta) = \zeta^k \hat{\varphi}(\zeta). \tag{5.5.6}$$

对 $y(x) \in D(T_0')$, 令 $u(x) = \begin{cases} y(x), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x \in (0, \infty), \end{cases}$ 则

$$(T_0 y, y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} (a_k + \mathrm{i}b_k) u^{(2k)}(x) \overline{u}(x) \ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (a_k + \mathrm{i}b_k) |u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

所以

$$(\Re + m\Im)(T_0 y, y) = \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (a_k + m b_k) |u^{(k)}(x)|^2 \ \mathrm{d}x, \tag{5.5.7}$$

其中 $\Re\lambda, \Im\lambda$ 分别表示 λ 的实部和虚部.

估计式 (5.5.7), 利用 Fourier 变换得

$$\begin{aligned}(\Re + m\Im)(T_0 y, y) &= \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (a_k + m b_k) |\hat{u}^{(k)}(\zeta)|^2 \ \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (a_k + m b_k) \zeta^{2k} |\hat{u}(\zeta)|^2 \ \mathrm{d}\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k + m b_k) \zeta^{2k} \right) |\hat{u}(\zeta)|^2 \ \mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

则

$$(\Re + m\Im)(T_0y, y) \geqslant \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\zeta)|^2 \, \mathrm{d}\zeta, \tag{5.5.8}$$

其中 $\Lambda = \inf\limits_{0<\zeta<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + mb_k)\zeta^{2k}$, 由 Fourier 变换在 $L_2(-\infty, \infty)$ 上等距有

$$(\Re + m\Im)(T_0y, y) \geqslant \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{5.5.9}$$

(1) 当 $m \geqslant 0$ 时,

$$\Lambda = \inf_{0<\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + mb_k)\zeta^{2k} \geqslant \inf_{0\leqslant\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\zeta^{2k} + m \inf_{0\leqslant\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k\zeta^{2k} = \Lambda_1 + m\Lambda_2;$$

(2) 当 $m < 0$ 时, 由 $b_n > 0$, $a_n > 0$ 有

$$\Lambda = \inf_{0<\zeta<\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\zeta^{2k} + m \sum_{k=0}^{n} b_k\zeta^{2k} \right) \geqslant \Lambda_1 + m \sup_{0<\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k\zeta^{2k} > -\infty,$$

所以, $\sigma(T_0)$ 包含在复平面上的集合 $\{x + \mathrm{i}y \mid x + my \geqslant \Lambda\}$ 内. 由 (1), (2) 及 m 是任意实数, 则有 $\sigma(T_0) \subset A = \{\lambda = a + \mathrm{i}b \mid a \in [\Lambda_1, \infty), \ \ b \in [\Lambda_2, \infty)\}$. □

定理 5.5.4 在式 (5.5.1) 中, 若系数 $a_k(x) + \mathrm{i}b_x(x)$ 满足

(1) $a_k(x)$, $b_k(x)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的实值函数; $a_k(x)$, $b_k(x) \in W_2^k(0, X)$, $(k = 0, 1, 2, \cdots, n; \forall X > 0)$, 且 $a_n(x) = a_n > 0$, $b_n(x) = b_n > 0$;

(2) 存在常数 a_k, b_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, 使得

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} |a_k(t) - a_k| \, \mathrm{d}t = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$
$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} |b_k(t) - b_k| \, \mathrm{d}t = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

则由 l 生成的最小算子 T_0 是一个 J-对称微分算子, T_0 的任何 J-自伴扩张都具有相同的本质谱 $\sigma_e(T_0)$, 且 $\sigma_e(T_0) \subset \{\lambda = x + \mathrm{i}y \mid x \in [\Lambda_1, \infty), \ \ y \in [\Lambda_2, \infty)\}$, 其中,

$$\Lambda_1 = \inf_{0<\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\zeta^{2k}, \quad \Lambda_2 = \inf_{0<\zeta<\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k\zeta^{2k}.$$

证明 由直和算子理论知, 研究 T_0 的本质谱 $\sigma(T_0)$ 的范围, 归结为对充分大的 N, 研究二次型 $(T_0'u, u)_{[N,\infty)}$ 的取值范围.

$\forall\varepsilon > 0$, $m \neq 0$, 由条件 (1) 和条件 (2) 知, 存在 N, 当 $X > N$ 时, 对 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$,

$$\int_x^{x+1} |a_k(t) - a_k| \,\mathrm{d}t < \varepsilon,$$
$$\int_x^{x+1} |b_k(t) - b_k| \,\mathrm{d}t < \varepsilon/|m|.$$

对任意的 $u \in D(T_0') \cap C_0^\infty(N,\infty)$,

$$(\Re + m\Im)(T_0'u,u)_{[N,\infty)} = \sum_{k=0}^{n} \int_N^\infty \left[(a_k(x) + mb_k(x))u^{(k)}(x)\right]^{(k)} \bar{u}(x) \,\mathrm{d}x. \tag{5.5.10}$$

对式 (5.5.10) 分部积分得

$$\begin{aligned}
&(\Re + m\Im)(T_0'u,u)_{[N,\infty)}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty [a_k(x) + mb_k(x)]\,|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\\
=&\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty (a_k + mb_k)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty [(a_k(x) + mb_k(x)) - (a_k + mb_k)]\,|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\\
\geqslant& (Bu,u)_{(N,\infty)} - \sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty (|a_k(x) - a_k| + |m|\ |b_k(x) - b_k|)\,|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

则式 (5.5.11) 分为两部分, $\forall\varepsilon > 0$, 利用上述讨论对后一部分作估计:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty (|a_k(x) - a_k| + |m|\,|b_k(x) - b_k|)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\int_v^{v+1} (|a_k(x) - a_k| + |m|\ |b_k(x) - b_k|)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2\left(\int_v^{v+1}|a_k(x) - a_k| \,\mathrm{d}x + \int_v^{v+1}|m|\ |b_k(x) - b_k| \,\mathrm{d}x\right)\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2(\varepsilon + \varepsilon)\\
=&2\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2\\
\leqslant&2\varepsilon\sum_{v=N}^{\infty}\|u\|_{C^{n-1}(v,v+1)}^2,
\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

在此, $\|u\|_{C^{n-1}(v,v+1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|$, 由引理 5.5.1 得, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_e$ 使得

$$\|u\|_{C^{n-1}(v,v+1)}\leqslant\varepsilon\,\|u^{(n)}\|_{L_2(v,v+1)}+C_e\|u\|_{L_2(v,v+1)}.$$

因此, 式 (5.5.12) 可化为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty(|a_k(x)-a_k|+|m||b_k(x)-b_k|)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x\\ \leqslant&2\varepsilon\sum_{v=N}^{\infty}\left(\varepsilon\|u^{(n)}\|_{L_2(v,v+1)}+C_e\|u\|_{L_2(v,v+1)}\right)^2\\ \leqslant&2\varepsilon\left(\varepsilon\sum_{v=N}^{\infty}\|u^{(n)}\|_{L_2(v,v+1)}+C_e\sum_{v=N}^{\infty}\|u\|_{L_2(v,v+1)}\right)^2\\ \leqslant&2\varepsilon\left(\varepsilon\|u^{(n)}\|_{L_2(N,\infty)}+C_e\|u\|_{L_2(N,\infty)}\right)^2,\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 当 N 充分大时, $(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{[N,\infty)}\geqslant(Bu,u)_{[N,\infty)}$, 其中,

$$(Bu,u)_{[N,\infty)}=\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty(a_k+mb_k)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

由引理 5.5.1 得 $(Bu,u)_{[N,\infty)}\geqslant\Lambda(u,u)$, 这里的 Λ 由式 (5.5.9) 定义. 所以, $\sigma_e(T_0)\subset\{\lambda=x+\mathrm{i}y\mid x\in[\Lambda_1,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\}$, 其中, Λ_1, Λ_2 由式 (5.5.3) 所定义. □

5.5.4 常系数 Euler 微分算子及其相关摄动的本质谱

本小节研究微分算式

$$lu(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(x^{2k}[a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)]u^{(k)}(x)\right)^{(k)},\quad x\in(0,\infty)\qquad(5.5.13)$$

生成的 J-自伴微分算子的本质谱的存在区域, 其中 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数, 即式 (5.5.1) 中的 $p_{n-k}(x)=x^{2k}(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))$.

定理 5.5.5 在式 (5.5.13) 中, 若系数 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 都是常值函数, 即 $a_k(x)=a_k$, $b_k(x)=b_k$, a_k,b_k 均为常数 $(k=0,1,\cdots,n)$ (在此情形下, 式 (5.5.13) 称为 Euler 微分算式, 生成的算子称为 Euler 微分算子). 而且 $a_n>0$, $b_n>0$, 则由式 (5.5.13) 生成的算子 T_0 是 J-对称算子, 其任何 J-自伴扩张都具有相同的本质谱, 均包含在集合 $\{\lambda=x+\mathrm{i}y\mid x\in[\Lambda_1,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\}$ 内, 即

$$\sigma_e(T_0)\subset\{\lambda=x+\mathrm{i}y|x\in[\Lambda_1,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\},\qquad(5.5.14)$$

其中,

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \inf\limits_{0<\xi<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \prod\limits_{j=1}^{k} \left[\xi^2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)^2\right], \\ \Lambda_2 = \inf\limits_{0<\xi<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \prod\limits_{j=1}^{k} \left[\xi^2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)^2\right] \end{cases} \tag{5.5.15}$$

证明　作变换

$$(\tau u)(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} u(\mathrm{e}^t) \equiv \varphi(t),$$
$$(\tau^{-1}\varphi)(x) = u(x), \quad x = \mathrm{e}^t,$$

则 τ 是 $L^2(0,\infty)$ 到 $L^2(-\infty,\infty)$ 上 1-1 的等距变换. 而且在 L^2 范数下, 将 $C_0^\infty(0,\infty)$ 1-1 地变为空间 $C_0^\infty(-\infty,\infty)$. $\forall u(x) \in C_0^\infty(0,\infty)$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}u(\mathrm{e}^t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\varphi(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t})\varphi(t) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\frac{1}{2}})\varphi(t) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\varphi(t) + x^{-\frac{1}{2}}\varphi'(t)\frac{1}{x} \\ &= x^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\right)\varphi(t). \end{aligned}$$

对 $u(x)$ 求 k 阶导数,

$$u^{(k)}(x) = x^{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k + \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\right)\varphi(t).$$

从而

$$(x^{2k}u^{(k)}(x))' = x^{k-\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k + \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\right)\varphi(t),$$

$$(x^{2k}u^{(k)}(x))'' = x^{k-\frac{5}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \left(k - \frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\right)\varphi(t),$$

求 k 阶导数得

$$(x^{2k}u^{(k)}(x))^{(k)} = x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \left(k - \frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi(t).$$

由于 $p_k(x) = p_k = a_k - \mathrm{i}b_k$ 为常数, 所以, $l(u)$ 的表达式化为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k(x^{2k}u^{(k)})^{(k)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sum_{k=0}^{n} p_k \prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi(t),$$

定义算子 $L_0 : D(L_0) = C_0^{\infty}(-\infty,\infty), \forall \varphi \in D(L_0)$,

$$L_0\varphi = \sum_{k=0}^{n} p_k \prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi(t).$$

由上面的运算及定义知, $T_0 = \tau^{-1}L_0\tau$. 显然, L_0 是下半有界的, 而且 L_0 与 T_0 具有相同的本质谱, 也等于 T_0 的所有 J-自伴扩张的本质谱, $\sigma_e(T_0) = \sigma_e(L_0)$.

以下讨论 L_0 本质谱的存在范围, $\forall m \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in D(L_0)$,

$$\begin{aligned}(\Re + m\Im)(L_0\varphi,\varphi) &= (\Re + m\Im)\left(\sum_{k=0}^{n} p_k \prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi,\varphi\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(a_k + mb_k)\prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi\right]\bar{\varphi}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.5.16}$$

由引理 5.5.1 得

$$(\Re + m\Im)(L_0\varphi,\varphi) \geqslant \Lambda'(\varphi,\varphi), \tag{5.5.17}$$

其中,

$$\Lambda' = \inf_{0<\xi<\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right] + m\sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right]\right). \tag{5.5.18}$$

(1) 当 $m \geqslant 0$ 时, 由 $a_n > 0,\ b_n > 0$ 得

$$\begin{aligned}\Lambda' &\geqslant \inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right] + m\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right]\\ &= \Lambda_1 + m\Lambda_2;\end{aligned}$$

(2) 当 $m \leqslant 0$ 时, 由 $a_n > 0,\ b_n > 0$ 得

$$\begin{aligned}\Lambda' &\geqslant \inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right] + \inf_{0<\xi<\infty} m\sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right]\\ &\geqslant \Lambda_1 + m\sup_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right] > -\infty,\end{aligned}$$

其中, Λ_1, Λ_2 由式 (5.5.15) 所定义. 根据式 (5.5.17) 及 (1) 和 (2) 知, $\sigma_e(L_0)$ 包含在复平面的集合 $\{x+\mathrm{i}y \mid x+my \geqslant \Lambda'\}$ 内, 由于 m 是任意实数, 所以有

$$\sigma_e(L_0) \subset \{x+\mathrm{i}y \mid x \in [\Lambda_1, \infty),\ y \in [\Lambda_2, \infty)\},$$

又 $\sigma_e(T_0) = \sigma_e(L_0)$, 定理得证. □

定理 5.5.6 在式 (5.5.13) 中, 若系数 $p_k(x) = (a_k(x) + \mathrm{i}b_k(x))x^{2k}$ 中的 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $b_k(x) \in W_2^k[0, X],\quad 0 \leqslant k \leqslant n$;

(2) $a_n(x) \equiv a_n > 0,\ b_n(x) \equiv b_n > 0,\ x \in (0, \infty)$;

(3) 存在常数 $a_k,\ b_k\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, 使得

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}\displaystyle\int_x^{2x} |a_k(t) - a_k|\ \mathrm{d}t = 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}\displaystyle\int_x^{2x} |b_k(t) - b_k|\ \mathrm{d}t = 0, \end{cases} \tag{5.5.19}$$

则由式 (5.5.13) 生成的最小算子 T_0 是一个 J-对称微分算子, T_0 的任何 J-自伴扩张具有相同的本质谱 $\sigma_e(T_0)$, 而且 $\sigma_e(T_0) \subset \{\lambda = x+\mathrm{i}y \mid x \in [\Lambda_1, \infty),\ y \in [\Lambda_2, \infty)\}$, 其中 Λ_1, Λ_2 由式 (5.5.15) 所定义.

证明 与定理 5.5.4 的证明一样转化为对充分大的 $X > 0$, 研究二次型 $(T_0'u, u)_{(X,\infty)}$ 的取值范围, 其中 $u(x) \in D(T_0'|_{(X,\infty)})$, 即 $u(x) \in C_0^\infty(X, \infty) \cap D(T)$. $\forall \varepsilon > 0$, $m \neq 0$, 由条件 (1) 和条件 (3) 知, 存在 $X > 0$, 当 $x > X$ 时, 对 $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 都有

$$\begin{cases} x^{-1}\displaystyle\int_x^{2x} |a_k(t) - a_k|\mathrm{d}t < \varepsilon, \\ x^{-1}\displaystyle\int_x^{2x} |b_k(t) - b_k|\mathrm{d}t < \varepsilon/|m|. \end{cases} \tag{5.5.20}$$

下面对 $u(x) \in D(T_0'|_{(X,\infty)})$, 估计 $(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(X,\infty)}$.

$$\begin{aligned} &(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(X,\infty)} \\ =&\sum_{k=0}^{n} \int_X^\infty \left[(-1)^k (x^{2k}a_k(x) + mx^{2k}b_k(x))u^{(k)}(x)\right]^{(k)} \bar{u}(x)\ \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{5.5.21}$$

对式 (5.5.21) 右端分部积分得

$$(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(X,\infty)} = \sum_{k=0}^{n} \int_X^\infty (x^{2k}a_k(x) + mx^{2k}b_k(x))|u^{(k)}(x)|^2\ \mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_X^{\infty}(a_k+mb_k)x^{2k}|u^{(k)}(x)|^2\ \mathrm{d}x$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}[(a_k(x)-a_k)+m(b_k(x)-b_k)]x^{2k}|u^{(k)}(x)|^2\ \mathrm{d}x.$$

从而有

$$(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{(X,\infty)}\geqslant(Bu,u)_{(X,\infty)}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|a_k(x)-a_k|\,x^{2k}\,|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x$$
$$-|m|\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|b_k(x)-b_k|\,x^{2k}\,|u^{(k)}(x)|^2\ \mathrm{d}x,\qquad(5.5.22)$$

式 (5.5.22) 的右端分为三部分, 利用引理 5.5.1 中的不等式及式 (5.5.20) 对式 (5.5.22) 右端作估计, 其中第一部分为

$$(Bu,u)_{(X,\infty)}=\sum_{k=0}^{n}\int_X^{\infty}(a_k+mb_k)x^{2k}\,|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x;\qquad(5.5.23)$$

第二部分为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|a_k(x)-a_k|\ x^{2k}\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}|a_k(x)-a_k|\ x^{2k}\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^vX\int_1^2|a_k(2^vXt)-a_k|\ t^{2k}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\ \mathrm{d}t$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^vX\ \max_{1\leqslant t\leqslant 2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\cdot 2^{2n}\int_1^2|a_k(2^vXt)-a_k|\ \mathrm{d}t$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^{2n}\ \max_{1\leqslant t\leqslant 2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\cdot 2^vX\int_1^2|a_k(2^vXt)-a_k|\ \mathrm{d}t$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^{2n}\ \max_{1\leqslant t\leqslant 2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\cdot 2^vX\cdot\frac{1}{2^vX}\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}|a_k(x)-a_k|\ \mathrm{d}x.$$

根据式 (5.5.20) 得

$$\frac{1}{2^vX}\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}|a_k(x)-a_k|\ \mathrm{d}x<\varepsilon,$$

所以,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|a_k(x)-a_k|\ x^{2k}\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^{2n}\cdot\varepsilon\,2^vX\ \max_{1\leqslant t\leqslant 2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\\
=&\sum_{v=0}^{\infty}\varepsilon\,2^{2n}\ 2^vX\left(\sum_{k=0}^{n-1}\max_{1\leqslant t\leqslant 2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\right)
\end{aligned}\tag{5.5.24}$$

利用引理 5.5.1 中的不等式得, $\forall\varepsilon_1>0$, $\exists C_{\varepsilon_1}>0$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\max_{1\leqslant t\leqslant 2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^vXt)\right|^2\leqslant\varepsilon_1\int_1^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^vXt)\right|^2\mathrm{d}t+C_{\varepsilon_1}\int_1^2|u(2^vXt)|^2\ \mathrm{d}t,$$

则式 (5.5.24) 化为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|a_k(x)-a_k|\ x^{2k}\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x\\
\leqslant&\sum_{v=0}^{\infty}\varepsilon\,2^{2n}\ 2^v\ X\left(\varepsilon_1\int_1^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^vXt)\right|^2\ \mathrm{d}t+C_{\varepsilon_1}\int_1^2|u(2^vXt)|^2\ \mathrm{d}t\right)\\
\leqslant&\sum_{v=0}^{\infty}\varepsilon\,C\left[2^vX\int_1^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^vXt)\right|^2\mathrm{d}t+2^vX\int_1^2|u(2^vXt)|^2\ \mathrm{d}t\right]\\
=&\sum_{v=0}^{\infty}\varepsilon\,C\left[\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}(2^vX)^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\ \mathrm{d}x+\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right]\\
\leqslant&\varepsilon\,C\ \sum_{v=0}^{\infty}\left(\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\ \mathrm{d}x+\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right)\\
=&\varepsilon\,C\left(\int_X^{\infty}x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\ \mathrm{d}x+\int_X^{\infty}|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right),
\end{aligned}\tag{5.5.25}$$

其中, $C=\max\{2^{2n}\varepsilon_1,\ 2^{2n}\ C_{\varepsilon_1}\}$.

采用同样办法对式 (5.5.22) 右端第三部分作估计, 得

$$\begin{aligned}
&|m|\ \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|b_k(x)-b_k|\ x^{2k}\ |u^{(2k)}(x)|^2\ \mathrm{d}x\\
\leqslant&\varepsilon\ c_1\left(\int_X^{\infty}x^{2n}\ |u^{(n)}(x)|^2\ \mathrm{d}x+\int_X^{\infty}|u(x)|^2\ \mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 当 X 充分大时, 对 $u(x)\in D(T_0'|_{(X,\infty)})\subset D(T)$, 利用式 (5.5.25) 及上式, 式 (5.5.22) 可化为

$$(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{(X,\infty)}\geqslant(Bu,u)_{(X,\infty)},\quad u\in D(T_0'|_{(X,\infty)}),$$

其中, $(Bu,u)_{(X,\infty)}$ 由式 (5.5.23) 所决定, 由于 a_k, b_k 为常数, 所以由定理 5.5.5 便得

$$(Bu,u)_{(X,\infty)}\geqslant\Lambda'(u,u),$$

此处的 Λ' 同式 (5.5.18) 中一致. 所以, $\sigma_e(T_0)\subset\{\lambda=x+\mathrm{i}y\mid x\in[\Lambda_1,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\}$, Λ_1,Λ_2 同定理 5.5.5 中式 (5.5.15) 一致.

5.5.5 具有可积系数的二阶 J-对称微分算子的本质谱

本节研究微分算式

$$l(y)=-(p(x)y')'+q(x)y,\quad x\in(a,+\infty)\tag{5.5.26}$$

所生成的微分算子的谱, 其中, 系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ 是定义在 (a,∞) 上的实函数. 主要研究由式 (5.5.26) 确定的最小算子 T_0 生成的 J-自伴 Sturm-Liouville 微分算子的本质谱和离散谱的存在范围.

定理 5.5.7 若式 (5.5.26) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$ 满足如下条件:

(1) $p_j(x)>0,\ \ x\in(a,\infty),\ j=1,2$, 而且 $\dfrac{1}{p_j(x)}\in L(a,\infty),\ \ j=1,2;$

(2) $|q_j(x)|\in L(a,\infty),\ \ j=1,2,$

则存在常数 $c_1=c_1(p_1,q_1)$, $c_2=c_2(p_2,q_2)$, 使得 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 的本质谱 $\sigma_e(T)$ 包含在 Ω 内, 即 $\sigma_e(T)\subset\Omega$, 其中 $\Omega=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\Re\lambda\geqslant c_1,\ \Im\lambda\geqslant c_2\}$.

证明 由 5.1 节的讨论可知, 只需确定二次型 (T_0y,y)(当 $y\in D(T_0)$ 且 $\|y\|=1$ 时) 的取范围

$$(T_0y,y)=\int_a^\infty[-(py')'\bar{y}+qy\bar{y}]\,\mathrm{d}x,$$

对上式分部积分得

$$(T_0y,y)=\int_a^\infty(p|y'|^2+q|y|^2)\,\mathrm{d}x,\tag{5.5.27}$$

于是 $\forall y\in D(T_0)$,

$$\begin{aligned}\Re(T_0y,y)&=\int_a^\infty(p_1|y'|^2+q_1|y|^2)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_a^\infty p_1|y'|^2\,\mathrm{d}x-\int_a^\infty|q_1|\,|y|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{5.5.28}$$

由条件 (1) 和条件 (2) 中系数的可积性知, 存在充分小的 $\omega > 0$, 使得

$$\int_t^{t+\omega} p_1^{-1}\,\mathrm{d}x \int_t^{t+\omega} |q_1|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5.5.29}$$

对任意的 $t \in (a, \infty)$ 恒成立.

利用引理 5.5.2 对式 (5.5.28) 进行估计. 令 $m_1 = \int_a^\infty |q_1|\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned} \Re(T_0 y, y) \geqslant & \sum_{v=0}^{\infty} \int_{a+v\omega}^{a+(v+1)\omega} (p_1|y'|^2 - |q_1|\,|y|^2)\,\mathrm{d}x, \\ = & \sum_{v=0}^{\infty} \int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 - |q_1|\,|y|^2)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{5.5.30}$$

其中, $\omega_v = (a + v\omega, a + (v+1)\omega]$, 而且 $|\omega_v| = \omega$ $(v = 1, 2, \cdots)$. 根据 ω 的选取以及引理 5.5.2 可得下面估计:

$$\int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 + |q_1|\,|y|^2)\,\mathrm{d}x \geqslant \mu_{\omega_v} \left(1 + |\omega|\mu_{\omega_v} \int_{\omega_v} p_1^{-1}\,\mathrm{d}x\right)^{-1} \|y\|_{\omega_v}^2, \tag{5.5.31}$$

其中, $\mu_{\omega_v} = \frac{1}{|\omega|}\int_{\omega_v} -|q_1|\,\mathrm{d}x$, $\|y\|_{\omega_v}^2 = \int_{\omega_v} |y|^2\,\mathrm{d}x$, 从而

$$\begin{aligned} \int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 + |q_1|\,|y|^2)\mathrm{d}x \geqslant & -\frac{1}{|\omega|}\int_{\omega_v} -|q_1|\mathrm{d}x\left(1 - \int_{\omega_v} -|q_1|\mathrm{d}x \int_{\omega_v} p_1^{-1}\mathrm{d}x\right)^{-1} \|y\|_{\omega_v}^2 \\ \geqslant & -\frac{2m_1}{\omega}\|y\|_{\omega_v}^2 = c_1\|y\|_{\omega_v}^2, \end{aligned} \tag{5.5.32}$$

此处 $c_1 = c_1(p_1, q_1) = -\frac{2m_1}{\omega}$. 把式 (5.5.32) 代入式 (5.5.30) 得

$$\Re(T_0 y, y) \geqslant \sum_{v=0}^{\infty} c_1\|y\|_{\omega_v}^2 = c_1\|y\|^2. \tag{5.5.33}$$

同样的办法可得

$$\Im(T_0 y, y) \geqslant \sum_{v=0}^{\infty} c_2\|y\|_{\omega_v}^2 = c_2\|y\|^2, \tag{5.5.34}$$

其中, $c_2 = c_2(p_2, q_2) = -\frac{2m_2}{\omega'}$, $m_2 = \int_a^\infty |q_2|\,\mathrm{d}x$, 而 $\omega' > 0$, 使得对 $\forall t \in (a, \infty)$,

$$\int_t^{t+\omega'} p_2^{-1}\,\mathrm{d}x \int_t^{t+\omega'} |q_2|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2} \tag{5.5.35}$$

恒成立.

由式 (5.5.33) 和式 (5.5.34) 得到 $K(T_0)\subset\Omega=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\Re\lambda\geqslant c_1,\ \Im\lambda\geqslant c_2\}$, 利用引理 5.5.1 便得结论. □

推论 5.5.8 若式 (5.5.26) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$ 满足定理 5.5.7 的假设, 则存在常数 $c_1=c_1(p_1,q_1)$, $c_2=c_2(p_2,q_2)$, 使得 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 在区域 $\mathbb{C}\backslash\Omega$ 内只有离散谱, 其中 $\Omega=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\Re\lambda\geqslant c_1,\ \Im\lambda\geqslant c_2\}$.

类似文献 [124] 中的§22 定理 8 能得到下面的结论 (见文献 [176] 的定理 3.1 的证明过程).

定理 5.5.9 设函数 $\left(\dfrac{1}{p_0}\right)'$, p_1, $p_2,\cdots,p_n$ 在区间 $[a,\infty)$ 上可积, 且 $\Im p_0(x)\equiv 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}p_0(x)>0$, 则方程

$$(-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)}+(-1)^{n-1}(p_1y^{(n-1)})^{(n-1)}+\cdots+p_ny=\lambda y \tag{5.5.36}$$

有这样的 $2n$ 个线性无关的解 $y_1,y_2,\cdots,y_{2n}$, 当 $x\to\infty$ 时, 它们的渐近性状如下:

$$y_k=\mathrm{e}^{\mu_k\xi}[1+o(1)],\quad k=1,2,\cdots,2n, \tag{5.5.37}$$

其中, μ_k 为 $(-1)^n\lambda$ 的所有不同的 $2n$ 次方根, 其实部各不相同, 而 $\xi=\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(t)}}\mathrm{d}t$, 而且由式 (5.5.36) 生成的最小算子是 J- 对称算子, 其亏指数等于 n.

定理 5.5.10 若式 (5.5.26) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$ 满足如下条件:

(1) $p_1(x)>0$, $p_2(x)\equiv 0$, $x\in(a,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty}p_1(x)>0$, 而且 $\left(\dfrac{1}{p_1(x)}\right)'\in L(a,\infty)$;

(2) $|q_j(x)|\in L(a,\infty)$, $j=1,2$,

则由式 (5.5.26) 生成的 J-对称算子 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 的本质谱充满正实轴, 即 $\sigma_e(T)=\mathbb{R}^+=[0,\infty)$; 而在区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内只有 T 的离散谱.

证明 定理的假设完全符合定理 5.5.9 的条件, 根据定理 5.5.9 得, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 方程

$$-(p(x)y'(x))'+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{5.5.38}$$

有两个线性无关的解 y_1,y_2. 当 $x\to\infty$ 时,

$$y_k=\mathrm{e}^{\mu_k\xi}[1+o(1)],\quad k=1,2, \tag{5.5.39}$$

其中, μ_k 为 $-\lambda$ 的两个不同的 2 次方根, 其实部互不相同, 而 $\xi=\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\sqrt{p_1(t)}}\mathrm{d}t$, 而

且由式 (5.5.26) 生成的 J-对称算子 T_0 的亏指数等于 1.

令 $s=|\lambda|^{\frac{1}{2}}$, 则 $\mu_k=s\omega_k$, 其中 $(s\omega_k)^2=-\lambda\ \ (k=1,2)$. 从而当 $x\to\infty$ 时,

$$y_k=\mathrm{e}^{s\xi\omega_k}[1+o(1)],\quad k=1,2.$$

下面根据上式及定理 5.4.4 来确定 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 的本质谱:

(1) 当 $\Re\lambda\geqslant 0$, $\arg\lambda=0$ 时, $\mu_1=s\mathrm{i}$, $\mu_2=-s\mathrm{i}$, 于是有 $y_1,y_2\notin L^2(a,\infty)$, 由此及引理 5.1.2 说明 $\lambda\notin\Pi(T_0)$, 而且解 y_1,y_2 的任何线性组合都不属于 $L^2(a,\infty)$. 因此, λ 属于 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 的本质谱, 即 $\mathbb{R}^+\subset\sigma_e(T)$.

(2) 当 $\Re\lambda>0$, $0<\arg\lambda<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $\dfrac{\pi}{4}<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{4}<\theta_2<\dfrac{3\pi}{2}$, 因此有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$. y_2 是某个 J-自伴扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

(3) 当 $\Re\lambda>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\arg\lambda<0$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta_1<-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}<\theta_2<\dfrac{3\pi}{4}$, 于是 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$. y_2 是某个 J-自伴扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

(4) 当 $\Re\lambda=0$, $\arg\lambda=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi\pm\frac{\pi}{4})}$, 于是有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$. y_2 是某个 J-自伴扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

(5) 当 $\Re\lambda<0$, 而 $\arg\lambda=\pi$ 时, $\mu_1=s$, $\mu_2=-s$, 因此 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$. y_2 是某个 J-自伴扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

(6) 当 $\Re\lambda<0$, $\dfrac{\pi}{2}<\arg\lambda<\pi$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 而 $0<\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$, $\pi<\theta_2<\dfrac{5\pi}{4}$. 于是 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$. y_2 是某个 J-自伴扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

(7) 当 $\Re\lambda<0$, $-\pi<\arg\lambda<-\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $-\dfrac{\pi}{4}<\theta_1<0$, $\dfrac{3\pi}{4}<\theta_2<\pi$. 因此 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$. y_2 是某个 J-自伴扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

根据 (1)~(7) 的讨论可知, 区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内的任意点 λ 都可能是 T_0 的某个 J-自伴扩张 T 的特征值. 又因为 T_0 的任何 J-自伴扩张都具有相同的本质谱, 所以 $\sigma_e(T)=\mathbb{R}^+=[0,\infty)$. □

推论 5.5.11 若式 (5.5.26) 的系数 $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$, $x\in(a,+\infty)$ 满足定理 5.5.10 的假设, 而且 $p(x)\equiv 1$, $x\in(a,+\infty)$, 则由式 (5.5.26) 生成的 J-对称算子 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 的本质谱充满正实轴, 即 $\sigma_e(T)=\mathbb{R}^+=[0,\infty)$; 而在区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内只有 T 的离散谱.

推论 5.5.12 若式 (5.5.26) 的系数 $q_2(x) \equiv 0,\ \ x \in (a, +\infty)$, $q(x) = q_1(x)$ 在区间 (a, ∞) 上可积, 而且 $p(x) \equiv 1,\ \ x \in (a, \infty)$, 则由式 (5.5.26) 生成的 J-对称算子 T_0 的任何 J-自伴扩张 T 的本质谱充满正实轴, 即 $\sigma_e(T) = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$; 而在区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内只有 T 的离散谱 (见文献 [124]§22 例 a).

5.5.6 高阶 J-自伴微分算子谱离散的充分条件

下面给出由式 (5.5.1) 生成的几类特殊微分算子, 其系数 $a_k(x), b_k(x)$ 满足一定条件时, 其谱是离散的.

定理 5.5.13 微分算式 (5.5.1) 的系数 $a_k(x), b_k(x)$ 若满足如下条件:

(1) 系数 $b_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 满足定理 5.5.4 的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x > N_1$ 时, $a_k(x) \geqslant 0\ \ (k = 0, 1, \cdots, n)$, $a_n(x) \geqslant a > 0$, 而且

$$\lim_{x \to \infty} \int_x^{x+1} a_0(x)\ \mathrm{d}x = \infty, \tag{5.5.40}$$

则由式 (5.5.1) 生成的 J-对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J-自伴算子的谱是离散的.

证明 同样仅需研究对充分大的 N 和 $u \in D(T_0')_{(N,\infty)}$, 二次型 $(T_0'u, u)_{[N,\infty)}$ 的取值范围.

$$(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(N,\infty)} = \sum_{k=0}^{n} \int_N^{\infty} \left[(a_k(x) + mb_k(x))u^{(k)}(x)\right]^{(k)} \bar{u}(x)\mathrm{d}x. \tag{5.5.41}$$

对式 (5.5.41) 分部积分得

$$(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(N,\infty)} = \sum_{k=0}^{n} \int_N^{\infty} (a_k(x) + mb_k(x))\ |u^{(k)}(x)|^2\ \mathrm{d}x. \tag{5.5.42}$$

在式 (5.5.42) 中, 估计 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_N^{\infty} a_k(x)\ |u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x$, 由条件 (2) 知, $\forall \varepsilon > 0$ 及任意大的 b_0, 存在 N_2, 使得当 $X > N_2$ 时, $\displaystyle\int_x^{x+1} a_0(t)\ \mathrm{d}t \geqslant b_0$.

取 $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $N > N_0$ 时, 由引理 5.5.1 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \int_N^{\infty} a_k(x)\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x \\
\geqslant\ & \alpha \int_N^{\infty} |u^{(n)}|^2\ \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n-1} \int_N^{\infty} a_k(x)\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x + \int_N^{\infty} u_0(x)|u|^2\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\geqslant \alpha \int_N^\infty |u^{(n)}|\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty \varepsilon|u^{(k)}|^2\,\mathrm{d}x + b_0\int_N^\infty |u|^2\,\mathrm{d}x$$

$$+\varepsilon\int_N^\infty |u'|^2\,\mathrm{d}x + \int_N^\infty (a_0(x)-b_0)|u|^2\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \mu_\varepsilon\|u\|^2 + \varepsilon\int_N^\infty |u'|^2\,\mathrm{d}x + \int_N^\infty (a_0(x)-b_0)\,|u|^2\,\mathrm{d}x, \tag{5.5.43}$$

其中, $\mu_\varepsilon = \inf\limits_{0<\zeta<\infty}(\alpha\zeta^{2n} - \varepsilon\zeta^{2(n-1)} - \cdots - \varepsilon\zeta^2 + b_0)$. 由 ε 任意小及 b_0 的任意大性知, $\mu_\varepsilon \to +\infty$.

又根据引理 5.5.2 可得式 (5.5.43) 右端后两项的估计

$$\varepsilon\int_N^\infty |u'|^2\,\mathrm{d}x + \int_N^\infty (a_0(x)-b_0)\,|u|^2\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \sum_{v=N}^\infty \int_v^{v+1} (\varepsilon|u'|^2 + (a_0(x)-b_0)|u|^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \sum_{v=N}^\infty \left[\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\left(1+\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\int_v^{v+1}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{-1}\right]\|u\|^2_{(v,v+1)}$$

$$\geqslant 0. \tag{5.5.44}$$

利用式 (5.5.43) 和式 (5.5.44), 式 (5.5.42) 可化为

$$(\Re + m\Im)(T_0'u,u)_{(N,\infty)} \geqslant \mu_\varepsilon\|u\|^2 + m\sum_{k=0}^n \int_N^\infty b_k(x)\,|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x, \tag{5.5.45}$$

从而有

$$\sigma_e(T_0) \subset \{x+\mathrm{i}y \mid x\in[\mu_\varepsilon,\infty),\ \ y\in[\Lambda_2,\infty)\}, \tag{5.5.46}$$

此处 Λ_2 与定理 5.5.3 中 Λ_2 相同. 由于 $\mu_\varepsilon \to \infty$, 故 $\sigma_e(T_0) = \varnothing$. 因此, T_0 的本质谱是空集, 即 T_0 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的. □

定理 5.5.14 若微分算式 (5.5.1) 的系数 $a_k(x), b_k(x)$ 满足如下条件:

(1) 系数 $a_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 满足定理 5.5.4 的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x>N_1$ 时, $b_k(x)\geqslant 0$ $(k=0,1,\cdots,n)$ $b_n(x)\geqslant\beta>0$, 而且

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} b_0(t)\mathrm{d}t = \infty, \tag{5.5.47}$$

则由式 (5.5.1) 生成的 J-对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J-自伴算子的谱的离散的.

证明 同定理 5.5.13, 只需考虑 $(m\Re+\Im)(T_0'u,u)_{(N,\infty)}$ 即可. □

定理 5.5.15 在式 (5.5.13) 中, 若系数 $p_k(x)=(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))\ x^{2k}$ 中的 $a_k(x),b_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $b_k(x)\ \ (k=0,1,\cdots,n)$ 满足定理 5.5.5 中的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x>N_1$ 时, $a_k(x)\geqslant 0\ \ (k=0,1,\cdots,n)$, 而且 $a_n(x)\geqslant\alpha>0$;

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}a_0(t)\ \mathrm{d}t=\infty, \tag{5.5.48}$$

则由式 (5.5.13) 生成的 J-对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J-自伴算子的谱是离散的, $\sigma(T_0)=\sigma_d(T_0)$.

证明 对充分大的 N, 当 $u\in D(T_0)_{(N,\infty)}=C_0^\infty(N,\infty)\cap D(T)$ 且 $\|u\|=1$ 时,

$$\begin{aligned}(T_0'u,u)_{(N,\infty)}&=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty(-1)^k\left[(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))\ x^{2k}\ u^{(k)}\right]^{(k)}\bar{u}\ \mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))\ x^{2k}\,|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5.5.49}$$

则 $\forall m\in\mathbb{R},\ m\neq 0$, 有

$$\begin{aligned}&(\Re+m\Im)\ (T_0'u,u)_{(N,\infty)}\\&=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty(a_k(x)+mb_k(x))\ x^{2k}\ |u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x+m\sum_{k=0}^n\int_N^\infty b_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{5.5.50}$$

在式 (5.5.50) 中, 估计第一项. 由条件 (2) 和条件 (3) 知, $\forall\varepsilon>0$ 及任意大的 b_0, 存在 N_2, 使得当 $x>N_2$ 时, $\displaystyle\int_x^{x+1}a_0(t)\ \mathrm{d}t\geqslant b_0$. 取 $N_0=\max(N_1,N_2)$, 则当 $N>N_0$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^n\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x\\&\geqslant\alpha\int_N^\infty x^{2n}|u^{(n)}|^2\ \mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x+\int_N^\infty a_0(x)|u|^2\ \mathrm{d}x\\&\geqslant\alpha\int_N^\infty x^{2n}|u^{(n)}|^2\ \mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty\varepsilon x^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x+\int_N^\infty b_0|u|^2\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$+\int_N^\infty \varepsilon x^2|u'|^2\ \mathrm{d}x+\int_N^\infty (a_0(x)-b_0)|u|^2\ \mathrm{d}x$$
$$\geqslant\sum_{k=0}^n\int_N^\infty C_kx^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x+\int_N^\infty \varepsilon x^2|u'|^2\ \mathrm{d}x+\int_N^\infty (a_0(x)-b_0)|u|^2\ \mathrm{d}x, \tag{5.5.51}$$

其中, $C_n=\alpha$, $C_k=-\varepsilon\ \ (k=1,2,\cdots,n-1)$, $C_0=b_0$. 下面对式 (5.5.51) 中的最后两项作估计. 由引理 5.5.2 得

$$\int_N^\infty \varepsilon x^2|u'|^2\ \mathrm{d}x+\int_N^\infty (a_0(x)-b_0)|u|^2\ \mathrm{d}x$$
$$=\sum_{v=N}^\infty\int_v^{v+1}\left(\varepsilon x^2|u'|^2+(a_0(x)-b_0)|u|^2\right)\ \mathrm{d}x$$
$$\geqslant\sum_{v=N}^\infty\left[\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\left(1+\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\int_v^{v+1}(\varepsilon x)^{-2}\mathrm{d}x\right)^{-1}\right]\|u\|^2_{(v,v+1)}$$
$$\geqslant 0. \tag{5.5.52}$$

利用式 (5.5.51) 和式 (5.5.52), 对式 (5.5.50) 作如下估计:

$$(\Re+m\Im)\ (T_0'u,u)_{(N,\infty)}\geqslant\sum_{k=0}^n\int_N^\infty C_kx^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x+m\sum_{k=0}^n\int_N^\infty b_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\ \mathrm{d}x.$$

再由引理 5.5.1 得

$$\sigma_e(T_0)\subset\{x+\mathrm{i}y\mid x\in[\Lambda_\varepsilon,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\}, \tag{5.5.53}$$

其中, Λ_2 同式 (5.5.15), 而 Λ_ε 如下面的表达式:

$$\Lambda_\varepsilon=\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^\infty C_k\prod_{j=1}^k\left[\xi^2+\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right], \tag{5.5.54}$$

由充分大的数 b_0 的任意性得 $\Lambda_\varepsilon\to\infty$, 所以, $\sigma_e(T_0)=\varnothing$, 故 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J-自伴算子的谱是离散的. □

定理 5.5.16 在式 (5.5.13) 中, 若系数 $p_k(x)=(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))x^{2k}$ 中的 $a_k(x),b_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $a_k(x)\ \ (k=0,1,\cdots,n)$ 满足定理 5.5.5 中的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x>N_1$ 时, $b_k(x)\geqslant 0\ \ (k=0,1,\cdots,n)$, 而且 $b_n(x)\geqslant\alpha>0$;

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}b_0(t)\ \mathrm{d}t=\infty, \tag{5.5.55}$$

则由式 (5.5.15) 生成的 J-对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J-自伴算子的谱是离散的, $\sigma(\overline{T}_0)=\sigma_d(\overline{T}_0)$.

证明同定理 5.5.15, 只需考虑 $(m\Re+\Im)$ $(T_0'u,u)_{(N,\infty)}$ 即可.

5.5.7 二阶情形

下面讨论二阶情形, 由引理 5.5.14 和定理 5.5.16 可立得.

定理 5.5.17 复系数的 Sturm-Liouville 微分算式

$$l(y)=-(p(x)y'(x))'+q(x)y(x),\quad x\in(0,\infty),\tag{5.5.56}$$

若系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$(其中 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数), 满足

(1) $p_1(x)\geqslant\alpha>0,\ \ p_2(x)\geqslant\beta>0,\ \ x\in(0,\infty)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}(q_1(x)+q_2(x))\,\mathrm{d}x=+\infty$,

则由式 (5.5.56) 生成的 J-对称 Sturm-Liouville 微分算子 T_0 的本质谱是空集, 即其任何 J-自伴扩张的谱都是离散的.

定理 5.5.18 在定理 5.5.17 中, 若式 (5.5.56) 的系数满足

(1) $p(x)=1,\ \ x\in(0,\infty)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}(q_1(x)+q_2(x))\,\mathrm{d}x=+\infty$,

则由式 (5.5.56) 生成的 J-对称 Sturm-Liouville 微分算子 T_0 的本质谱是空集, 即其任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

证明 同样只需研究 $(T_0'u,,u)_{(N,\infty)}$ 的取值范围. 由条件 (2) 知, 对任意充分大 b_0, $\exists N$, 当 $v>N$ 时, $\displaystyle\int_v^{v+1}(q_1(x)+q_2(x))\,\mathrm{d}x>b_0$. 而

$$(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{(N,\infty)}=\int_N^\infty|u'|^2\,\mathrm{d}x+\int_N^\infty(q_1(x)+mq_2(x))\,|u|^2\,\mathrm{d}x,$$

当 $m=1$ 时,

$$\begin{aligned}
&(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{(N,\infty)}\\
=&\int_N^\infty(\frac{1}{2}|u'|+b_0|u|^2)\,\mathrm{d}x+\int_N^\infty\left(\frac{1}{2}|u'|^2+(q_1(x)+q_2(x)-b_0)|u|^2\right)\,\mathrm{d}x\\
\geqslant& b_0\|u\|^2+\sum_{v=N}^\infty\int_v^{v+1}\left(\frac{1}{2}|u'|^2+(q_1(x)+q_2(x)-b_0)|u|^2\right)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}\tag{5.5.57}$$

由引理 5.5.2 知

$$\begin{aligned}&\int_v^{v+1}\left(\frac{1}{2}|u'|^2+(q_1(x)+q_2(x)-b_0)|u|^2\right)\,\mathrm{d}x\\ \geqslant&\int_v^{v+1}(q_1(x)+q_2(x)-b_0)\mathrm{d}x\left(1+2\int_v^{v+1}(q_1(x)+q_2(x)-b_0)\mathrm{d}x\right)^{-1}\|u\|^2_{[v,v+1]}\geqslant 0,\end{aligned}$$

代入式 (5.5.57) 得

$$(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{(N,\infty)}\geqslant b_0\|u\|^2_{(N,\infty)}.$$

由于 b_0 是任意大的, 故有 $\sigma_e(T_0)\subset\{x+\mathrm{i}y\mid x+y=\infty\}$, 从而 $\sigma_e(T_0)=\varnothing$. □

定理 5.5.19　复系数微分算式

$$l(y)=-(p(x)x^2y')'+q(x)y,\quad x\in(0,\infty),\tag{5.5.58}$$

若 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$(其中 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数) 满足

(1) 存在 $\alpha>0$, $\beta>0$, 使得对任意的 $x\in(0,\infty)$, $p_1(x)\geqslant\alpha, p_2(x)\geqslant\alpha$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}(q_1(x)+q_2(x))\,\mathrm{d}x=+\infty$,

则由式 (5.5.58) 生成的 J-对称最小算子 T_0 的本质谱是空集, 即其任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

定理 5.5.20　在定理 5.5.19 中, 若式 (5.5.58) 的系数满足

(1) $p(x)=1,\quad x\in(0,\infty)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}(q_1(x)+q_2(x))\,\mathrm{d}x=+\infty$,

则由式 (5.5.58) 生成的 J-对称最小算子 T_0 的本质谱是空集, 即其任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

证明　同样只需研究 $(T_0'u,u)_{(N,\infty)}$ 的取值范围. 由条件 (2) 知, 对充分大 b_0, 存在 N_0, 当 $v\geqslant N_0$ 时,

$$\int_v^{v+1}((q_1(x)+q_2(x))\,\mathrm{d}x>b_0,$$

取 $N>N_0$, 则

$$(\Re+m\Im)(T_0'u,u)_{(N,\infty)}=\int_N^\infty x^2|u'|^2\,\mathrm{d}x+\int_N^\infty(q_1(x)+mq_2(x))\,|u|^2\,\mathrm{d}x,$$

当 $m = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
&(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(N,\infty)} \\
&= \int_N^\infty x^2|u'|^2 \, \mathrm{d}x + b_0 \int_N^\infty |u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_N^\infty (q_1(x) + q_2(x) - b_0)|u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geqslant b_0\|u\|^2 + \sum_{v=N}^{\infty} \left[\int_v^{v+1} x^2|u'|^2 \, \mathrm{d}x + \int_v^{v+1} (q_1(x) + q_2(x) - b_0)|u|^2 \, \mathrm{d}x \right].
\end{aligned} \tag{5.5.59}$$

由引理 5.5.2 得

$$\begin{aligned}
&\int_v^{v+1} x^2|u'|^2 \, \mathrm{d}x + \int_v^{v+1} (q_1(x) + q_2(x) - b_0)|u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_v^{v+1} (q_1(x) + q_2(x) - b_0) \, \mathrm{d}x \\
&\quad \cdot \left[1 + \int_v^{v+1} x^{-2} \, \mathrm{d}x \int_v^{v+1} (q_1(x) + q_2(x) - b_0) \, \mathrm{d}x \right]^{-1} \|u\|_{[v,v+1]}^2 \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

则式 (5.5.59) 变为

$$(\Re + m\Im)(T_0'u, u)_{(N,\infty)} \geqslant b_0\|u\|_{(N,\infty)}^2.$$

由于 b_0 是任意大的数, 故 $\sigma_e(T_0) \subset \{x + \mathrm{i}y \mid x + y = \infty\}$, 从而 $\sigma_e(T_0) = \varnothing$, 故其任何 J-自伴扩张的谱是离散的. □

第 6 章　非自伴算子的谱分解

6.1　非自伴紧算子

设 X 是可分的 Hilbert 空间, T 是定义在 X 上的非自伴算子. 本章主要讨论具有离散谱的算子 T, 即 $\sigma_r(T)=\sigma_c(T)=\sigma_e(T)=\varnothing$, $\sigma(T)=\sigma_d(T)$. 通过前面讨论已经知道, 紧算子的剩余谱和连续谱均是空集, 而且具有紧逆的无界算子 (如微分算子) 的谱是离散的, 所以, 本章主要研究无界线性算子谱的离散性及其特征系 (根空间) 的完备性.

定义 6.1.1　若 $\lambda_s\in\sigma_d(T)$, 称

$$N_{\lambda_s}=\{f\in D(T)\subset X\mid (T-\lambda_sI)^mf=0,\text{对于正整数 } m\} \tag{6.1.1}$$

为特征值 λ_s 的根子空间 (root subspace), 根子空间 N_{λ_s} 的维数称为特征值 λ_s 的代数重数 (algebraic multiplicities), 记为 m_{λ_s}, $\forall f\in N_{\lambda_s}$ 称为 T 的对应 λ_s 的根向量 (root vector).

注 1　当 $m=1$ 时, N_{λ_s} 就是特征值 λ_s 对应的特征子空间.

注 2　当 $m=m_{\lambda_s}$ 时, $\forall f\in N_{\lambda_s}$, 有 $(T-\lambda_sI)^mf=0$. 令

$$M_{\lambda_s}=(T-\lambda_sI)^{m_{\lambda_s}}D(A). \tag{6.1.2}$$

若 X 是可分的 Hilbert 空间, $D(T)=X$, T 是紧算子, 则有

$$X=M_{\lambda_s}\oplus N_{\lambda_s}. \tag{6.1.3}$$

在 N_{λ_s} 中选取一组基: $f_{11},f_{21},\cdots,f_{k_11},f_{12},f_{22},\cdots f_{k_22},\cdots,f_{1l},f_{2l},\cdots,f_{k_ll}$ 形成几个链, 其中有几个可能相同的, 而且满足

$$Tf_{1\tau}=\lambda_sf_{1\tau},\ \ Tf_{2\tau}=\lambda_sf_{2\tau}+f_{1\tau},\ \ \cdots,\ \ Tf_{k\tau}=\lambda_sf_{k_\tau\tau}+f_{k_\tau-1\tau}. \tag{6.1.4}$$

每个链中的第一个元素称为 T 的对应 λ_s 的特征向量 $f_{1\tau}$, 而其余的向量 $f_{2\tau},\cdots,$ $f_{k_\tau\tau}$ 称为 λ_s 对应特征向量 $f_{1\tau}$ 的共轭向量 (adjoint element (function, vector) 或 associated element).

从第 2 章的讨论可以看出, 对于紧自伴算子而言, 其特征系是完备的, 而且有相应的谱分解定理 (定理 2.5.15). 从第 4 章的讨论可以看出, 对于紧 J-自伴算子而

言, 其相应的奇异特征系是完备的, 而且有相应的 "谱分解" 定理 (定理 4.2.22). 但对于一般的紧算子, 特征系不一定在 X 中完备.

例 6.1.2 在 $L^2[a,b]$ 中定义算子

$$Af = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ a \leqslant x \leqslant b, \quad \forall f \in L^2[a,b], \tag{6.1.5}$$

则 A 在 $L^2[a,b]$ 上是紧算子, 但只有一个谱点 0, 既没有非零特征值, 也无特征向量, 无特征系.

定义 6.1.3 一个紧算子 T 称为是 Hilbert-Schmidt 型算子, 若

$$\sum_{i=1}^{\infty}(T\phi_i, T\phi_i) < \infty, \tag{6.1.6}$$

其中, $\{\phi_i\}$ 是 Hilbert 空间 X 的一个完备规范正交系.

例 6.1.4 积分算子 $K: L^2[a,b] \to L^2[a,b]$,

$$Kf = \int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t, \quad f \in L^2[a,b], \tag{6.1.7}$$

若

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty, \tag{6.1.8}$$

则算子 K 是 Hilbert-Schmidt 型算子.

显然, 有限秩算子一定是 Hilbert-Schmidt 型算子, Hilbert-Schmidt 型算子一定是紧算子. 反之均不然.

定义 6.1.5 设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的紧算子, N_s 是对应非零特征值 λ_s 的根子空间, 令

$$D_1 = \overline{\bigcup_{s=1}^{\infty} N_{\lambda_s}} = \mathrm{span}\{y \in N_{\lambda_s} \mid s = 1, 2, \cdots\}, \tag{6.1.9}$$

则闭集 D_1 为算子 T 的所有非零特征值对应的特征向量及其共轭的线性包的闭 (T 的所有非零特征值所对应的根子空间直和的闭包), 称 D_1 为算子 T 的根空间 (root space).

注 由于 N_{λ_s} 是 T 的不变子空间, 所以 D_1 也是 T 的不变子空间. 设 $D_1 \oplus D_2 = X$, 则 D_2 是 D_1 的直交子空间.

定理 6.1.6 若 T 是定义在 X 上的紧算子, 用 $R(T)$ 表示 T 的值域, 则

(1) D_1 在 $R(T)$ 中完备的充要条件是 $\forall h \in X,\ Th \in D_1$;

(2) D_1 在 $R(T)$ 中完备的充要条件是 $\forall g \in D_2$, $T^*g = 0$.

证明　(1) 必要性. 设 D_1 在 $R(T)$ 中完备, 由于 D_1 是闭集, 所以 $D_1 = R(T)$, 故 $\forall h \in X$, $Th \in D_1$.

充分性. $\forall h \in X$, $Th \in D_1$, 即有 $R(T) \subset D_1$, 故 D_1 在 $R(T)$ 中完备.

(2) 充分性. 设 $T^*g = 0$, $\forall g \in D_2$. 由于 $\forall h \in X$,

$$(Th, g) = (h, T^*g) = 0.$$

所以 $Th \perp D_2$, 从而 $Th \in D_1$, 根据 (1) 便有 D_1 在 $R(T)$ 中完备.

必要性. 若 D_1 在 $R(T)$ 中完备, 则 $\forall h \in X, Th \in D_1$, 于是 $\forall g \in D_2$, 有

$$0 = (Th, g) = (h, T^*g),$$

由此得 $T^*g = 0$. □

若记 T^* 在 D_2 上的限制 $T^*_{D_2} = T^*|_{D_2}$, 则定理 6.1.6 中 (2) 可以表示为 D_1 在 $R(T)$ 中完备的必要条件是 $T^*_{D_2} = 0$.

定理 6.1.7　$T^*_{D_2}$ 具有唯一的谱点是 $\lambda = 0$.

证明　若不然, 设 λ_0 是 $T^*_{D_2}$ 的谱, $\lambda_0 \neq 0$, 则 $\exists \phi_0 \neq 0$, $\phi_0 \in D_2$, 使得

$$T^*_{D_2}\phi_0 = T^*\phi_0 = \lambda_0\phi_0.$$

$\forall h \in X$,

$$0 = (h, (T^* - \lambda_0 I)\phi) = ((T - \overline{\lambda_0} I)h, \phi_0). \tag{6.1.10}$$

若 $\overline{\lambda_0} \notin \sigma_p(T)$, 则 $(T - \bar{\lambda}_0 I)D(T) = X$, 所以, $\phi_0 = 0$, 矛盾.

若 $\overline{\lambda_0} \in \sigma_p(T)$, 则 $X = M_0 \oplus N_0$, N_0 是 $\overline{\lambda_0}$ 对应的根子空间, $M_0 = (T - \bar{\lambda}_0 I)X$, 由式 (6.1.10) 知, $\phi_0 \perp M_0$, 从而 $\varphi_0 \in N_0$, 即 $\phi_0 \subset D_1$, 而 $\phi_0 \subset D_2$, $D_1 \perp D_2$, 所以 $\phi_0 = 0$, 矛盾. 故 $T^*_{D_2}$ 只有零作为其谱点. □

6.2　Hilbert-Schmidt 型算子

设算子 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, $\{\phi_i\}$ 是 X 上的一组规范正交基, 则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T\phi_i, T\phi_i) < \infty. \tag{6.2.1}$$

由于 $\{\phi_i\}$ 是 X 上的一组规范正交基, $T\phi_i$ 可表示为

$$T\varphi_i = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{ij}\varphi_j, \quad \tau_{ij} = (T\varphi_i, \varphi_j), \tag{6.2.2}$$

即

$$(T\phi_i, T\phi_i) = \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_{ij}|^2. \tag{6.2.3}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T\varphi_i, T\varphi_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_{ij}|^2, \tag{6.2.4}$$

所以, T 是 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子的充要条件是

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |\tau_{ij}|^2 < \infty.$$

例 6.2.1 在例 6.1.4 中, 当式 (6.1.8) 成立时, 由式 (6.1.7) 定义的算子 K 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 反之, 若 K 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 则式 (6.1.8) 成立. 称算子 K 为以 $k(x,t)$ 为核的积分算子.

引理 6.2.2 定义在可分的 Hilbert 空间 X 上的每个 Hilbert-Schmidt 型算子等价于定义在 $L^2[0,1]$ 上唯一的一个以 $k(x,t)$ 为核的积分算子 K, 其中 $k(x,t)$ 满足

$$\int_0^1\int_0^1 |k(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty. \tag{6.2.5}$$

证明 由于 X 是 Hilbert 空间, 则 X 与 $L^2[0,1]$ 同构, 可以建立同构映射: $f \to f(x)$, 其中, $f \in X, f(x) \in L^2[0,1]$. 设 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_s, \cdots$ 是 X 内的一组规范正交基, 对应 $L^2[0,1]$ 内的规范正交基为 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_s(x), \cdots$. 由于 T 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 所以, $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |\tau_{ij}|^2 < \infty$, 其中, τ_{ij} 由式 (6.2.3) 定义. 令

$$k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \tau_{ij}\phi_i(x)\overline{\phi_j(t)}, \tag{6.2.6}$$

在 $L^2[0,1]$ 内引入积分算子

$$Kf(t) = \int_0^1 k(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

由式 (6.2.6) 及 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |\tau_{ij}|^2 < \infty$ 得, K 是定义在 $L^2[0,1]$ 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, 而且

$$
\begin{aligned}
(K\phi_r(x), \phi_s(x)) &= \int_0^1 \int_0^1 k(x,t)\phi_r(t)\overline{\phi_s(x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} \tau_{ij}\phi_i(x)\overline{\phi_j(t)} \right) \phi_r(t)\overline{\phi_s(x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \tau_{rs} = (T\phi_r, \phi_s),
\end{aligned} \tag{6.2.7}
$$

故 T 等价于 K, 唯一性易证. □

注 1　T 是 Hilbert-Schmidt 型算子 $\Leftrightarrow T^*$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子.

事实上, 由公式 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |(T\phi_i, \phi_j)|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |(T^*\phi_j, \phi_i)|^2$ 得

$$
\sum_{i,j=1}^{\infty} |\overline{\tau}_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\tau_{ij}|^2 < \infty,
$$

由此便得结论.

注 2　若 C 是有界算子, T 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 则 CT 与 TC 均为 Hilbert-Schmidt 型算子.

事实上, 由 $\|CT\phi_i\|^2 \leqslant \|C\| \, \|T\phi_i\|^2$ 得到 CT 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 又根据 $TC = (C^*T^*)^*$ 得到 TC 也是 Hilbert-Schmidt 型算子.

注 3　T 是自伴的 Hilbert-Schmidt 型算子, 则

$$
\sum_{i=1}^{\infty} (T\phi_i, T\phi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2, \tag{6.2.8}
$$

其中, λ_i 是 T 的特征值, ϕ_i 是 X 上的规范正交基.

引理 6.2.3　设 S 是 Hilbert 空间 X 上的正定自伴 Hilbert-Schmidt 型算子, C 是 X 上的有界算子, 则

$$
T = S^{\frac{1}{2}} C S^{\frac{1}{2}} \tag{6.2.9}
$$

是一个 Hilbert-Schmidt 型算子.

证明　设 $\{\phi_i\}$ 是 S 的完备正交特征系, λ_i 是对应的特征值, 即 $S\phi_i = \lambda_i\phi_i$, 且 $\lambda_i > 0$. 由 $S^{\frac{1}{2}}$ 的定义知 $S^{\frac{1}{2}}\phi_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}\phi_i$, 于是

$$
\begin{aligned}
\|T\phi_i\|^2 &= \left\| S^{\frac{1}{2}} C S^{\frac{1}{2}} \phi_i \right\|^2 = (S^{\frac{1}{2}} C S^{\frac{1}{2}} \phi_i, S^{\frac{1}{2}} C S^{\frac{1}{2}} \phi_i) = ((S^{\frac{1}{2}} C)^* S^{\frac{1}{2}} C S^{\frac{1}{2}} \phi_i, S^{\frac{1}{2}} \phi_i) \\
&= (C^* S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} C S^{\frac{1}{2}} \phi_i, S^{\frac{1}{2}} \phi_i) = \lambda_i (C^* S C \phi_i, \phi_i) \leqslant \lambda_i \|C^* S C \phi_i\| \, \|\phi_i\| .
\end{aligned}
$$

所以

$$
\|T\varphi_i\|^2 \leqslant \frac{1}{2} (\|C^* S C \phi_i\|^2 + |\lambda_i|^2).
$$

由于 C 是在 X 上的有界算子, S 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 则 C^*SC 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|C^*SC\phi_i\|^2<\infty.$$

又由于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2<\infty$, 所以 T 是 Hilbert-Schmidt 型算子. □

定义 6.2.4 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧算子, 对任何规范正交基 $\{\phi_i\}\subset X$, 若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}(T\phi_i,\phi_j) \tag{6.2.10}$$

绝对收敛, 则称算子 T 具有迹, 并且称式 (6.2.10) 为算子 T 的迹(trace), 记为

$$\mathrm{tr}T=\mathrm{Sp}T=\sum_{i=1}^{\infty}(T\phi_i,\phi_j). \tag{6.2.11}$$

注 1 若 T 是具有迹的紧自伴算子, λ_i 是 T 的特征值, 则

$$\mathrm{tr}T=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i. \tag{6.2.12}$$

注 2 对于一般的算子 T, 可以表示为实部和虚部的和

$$T=T_R+\mathrm{i}T_I, \tag{6.2.13}$$

T_R 与 T_I 均为自伴算子, 设 $\{\phi_i\}\subset X$ 是任意一组规范正交基, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty}(T\phi_i,\phi_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(T_R\phi_i,\phi_i)+\mathrm{i}\sum_{i=1}^{\infty}(T_I\phi_i,\phi_i), \tag{6.2.14}$$

所以, 式 (6.2.14) 左端绝对收敛 $\Leftrightarrow$ 右端的两个级数均绝对收敛.

由于 $(T\varphi_i,T\varphi_i)=(T^*T\varphi_i,\varphi_i)$, T^*T 是正算子, 所以式 (6.2.1) 也表示正算子 T^*T 的迹.

定理 6.2.5 若 T_1 和 T_2 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, 则算子 $T_1\pm T_2$, T_1T_2 和 T_2T_1 均具有迹, 且 $\mathrm{tr}\,(T_1\pm T_2)=\mathrm{tr}\,T_1\pm\mathrm{tr}\,T_2$.

证明 根据定义 6.2.4 及

$$|(T_1T_2\phi_i,\phi_i)|=|(T_2\phi_i,T_1^*\phi_i)|\leqslant\|T_2\phi_i\|\,\|T_1^*\phi_i\|\leqslant\frac{1}{2}(\|T_2\phi_i\|^2+\|T_1^*\phi_i\|^2)$$

立得结论. □

推论 6.2.6　若 K 是定义在空间 $L^2[0,1]$ 上以 $k(x,t)$ 为核的自伴 Hilbert-Schmidt 型积分算子, 则 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$, K^2 具有迹, 且

$$\mathrm{tr}K^2=\int_0^1\int_0^1 k(s,t)k(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^1\int_0^1 |k(x,t)|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x;$$

若 T 是定义在 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, 则 T^n 具有迹 $(n\geqslant 2)$.

证明　简单计算便得 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$(可参考定理 7.5.2 的证明).

设 $\{\phi_i\}\subset L^2[0,1]$ 是完备系, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}K^2&=\sum_{i=1}^{\infty}(K^2\phi_i,\phi_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(K\phi_i,K\phi_i)=\int_0^1\int_0^1|k(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(K^2\phi_i,\phi_i)=\int_0^1\int_0^1 k(s,t)\overline{k(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^1\int_0^1 k(s,t)k(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用定理 6.2.5 及归纳法易得第二个结论. □

定理 6.2.7　设 K 是 $L^2[0,1]$ 上以 $k(x,t)$ 为核的积分算子, 若 K 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 则 $K^n(n\geqslant 2)$ 具有迹且

$$\mathrm{tr}K^n=\int_0^1\cdots\int_0^1 k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)\cdots k(x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.\tag{6.2.15}$$

证明　由推论 6.2.6 可知 $K^n(n\geqslant 2)$ 具有迹.

设 S_1 和 S_2 是两个自伴的 Hilbert-Schmidt 型积分算子, 积分核分别为 $s_1(x_1,x_2)$ 和 $s_2(x_1,x_2)$, 由于 S_1 和 S_2 是自伴的, 所以 $\overline{s(x_1,x_2)}=s_1(x_2,x_1)$, $\overline{s_2(x_1,x_2)}=s_2(x_2,x_1)$. 下证

$$\mathrm{tr}S_1S_2=\int_0^1\int_0^1 s_1(x_1,x_2)s_2(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.\tag{6.2.16}$$

令

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\int_0^1 s_1(x_1,x_2)s_2(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(s_1(x_1,x_2)\overline{s_2(x_1,x_2)}+s_2(x_1,x_2)\overline{s_1(x_1,x_2)})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\frac{1}{4}\left(\int_0^1\int_0^1|s_1+s_2|^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-\int_0^1\int_0^1|s_1-s_2|^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right),\end{aligned}$$

由于 S_1, S_2 是两个自伴的 Hilbert-Schmidt 型算子, 所以 S_1+S_2 与 S_1-S_2 也是自伴的 Hilbert-Schmidt 型算子. $S_1\pm S_2$ 分别是以 $s_1(x,t)\pm s_2(x,t)$ 为核的积分算

子, 而且也是自伴算子, $(S_1 \pm S_2)^2$ 也是自伴的 Hilbert-Schmidt 型积分算子, 根据式 (6.2.12) 得

$$\mathrm{tr}(S_1 \pm S_2)^2 = \int_0^1 \int_0^1 |s_1 \pm s_2|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$I = \frac{1}{4}(\mathrm{tr}(S_1 + S_2)^2 - \mathrm{tr}(S_1 - S_2)^2),$$

而

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}(\mathrm{tr}(S_1^2 + S_1S_2 + S_2S_1 + S_2^2) - \mathrm{tr}(S_1^2 - S_1S_2 - S_2S_1 + S_2^2)) \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{tr}S_1^2 + 2\mathrm{tr}S_1S_2 + \mathrm{tr}S_2^2 - \mathrm{tr}S_1^2 + 2\mathrm{tr}S_2S_1 - \mathrm{tr}S_2^2), \end{aligned}$$

所以,

$$I = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}S_1S_2 + \mathrm{tr}S_2S_1).$$

又因为 S_1, S_2 为自伴的 Hilbert-Schmidt 积分算子, 并且 $(S_1S_2\phi_i, \phi_i) = (S_2\phi_i, S_1\phi_i) = (\phi_i, S_2S_1\phi_i)$, 所以, 对任何完备直交系 $\{\phi_i\}$ 有

$$\mathrm{tr}S_2S_1 = \sum_{i=1}^{\infty}(S_2S_1\phi_i, \phi_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(\phi_i, S_1S_2\phi_i) = \mathrm{tr}S_1S_2$$

从而得到

$$I = \mathrm{tr}S_1S_2, \tag{6.2.17}$$

即得式 (6.2.16).

$$\mathrm{tr}S_1S_2 = \int_0^1 \int_0^1 s_1(x_1, x_2)s_2(x_2, x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{6.2.18}$$

利用归纳法可以证明式 (6.2.15):

(1) 当 K 是自伴 Hilbert-Schmidt 型算子时, 利用式 (6.2.16) 及 $K^n = KK^{n-1}$ 即可证得式 (6.2.15).

(2) 当 K 为 Hilbert-Schmidt 型算子时, $K = K_R + \mathrm{i}K_I$, $K^{n-1} = (K^{n-1})_R + \mathrm{i}(K^{n-1})_I$, 再利用式 (6.2.16) 和 $K^n = KK^{n-1}$ 也可证得式 (6.2.15). □

6.3 Hilbert-Schmidt 型算子根空间的完备性

6.3.1 Hilbert-Schmidt 型算子乘幂的迹

例 6.3.1 设 A 是定义在 $L^2[0,1]$ 上的算子, $\forall f \in L^2[0,1]$,

$$Af = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \tag{6.3.1}$$

A 也可以等价于积分算子

$$Af = \int_0^1 k(x,t)f(t)\mathrm{d}t, \tag{6.3.2}$$

其中, $k(x,t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant x, \\ 0, & t \geqslant x. \end{cases}$ 由 $k(x,t)$ 的形式可知道 A 也是 Hilbert-Schmidt 型算子, 而且对 $\forall \lambda \neq 0$, 由 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在有界知, $\lambda \in \rho(A)$, 并且

$$A^n f = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t. \tag{6.3.3}$$

所以 $\mathrm{tr}A^n = 0$.

如果 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s, \cdots$ 是 A 的特征值, 则称

$$D_A(\lambda) = \det(I - \lambda A) = \prod_{s=1}^{v(A)} (1 - \lambda\lambda_s) \tag{6.3.4}$$

为算子 A 的特征行列式 (characteristic determinant), 其中 $v(A)$ 表示算子 A 的特征值的个数 (包括重数 (几何)), $0 < v(A) \leqslant \infty$.

考虑定义在 $L^2[0,1]$ 上以 $k(x,t)$ 为核的 Hilbert-Schmidt 型积分算子

$$Af = \int_0^1 k(x,t)f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f \in L^2[0,1],$$

其中, $k(x,t)$ 满足 $\int_0^1\int_0^1 |k(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty$. 根据积分算子理论, $\forall \frac{1}{\lambda} \in \rho(A)$, $\forall g(x) \in L^2[0,1]$, 方程 $f(x) - \lambda A f(x) = g(x)$ 的解

$$f(x) = (I - \lambda A)^{-1} g(x) = \int_0^1 \tau(x,t,\lambda) g(t)\mathrm{d}t, \tag{6.3.5}$$

其中, $\tau(x,t,\lambda)$ 为预解算子的核

$$\tau(x,t,\lambda) = \frac{D^*(x,t,\lambda)}{D^*(\lambda)}, \tag{6.3.6}$$

$$D^*(x,t,\lambda) = k(x,t) + \sum_{n=1}^{v(A)} \delta_n(x,t)\lambda^n, \tag{6.3.7}$$

$$\delta_n(x,t) = \frac{(-1)^n}{n}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,s_1) & \cdots & k(x,s_n) \\ k(s_1,t) & 0 & \cdots & k(s_1,s_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k(s_n,t) & k(s_n,s_1) & \cdots & 0 \end{vmatrix} \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_n, \tag{6.3.8}$$

$$D^*(\lambda)=1+\sum_{n=2}^{v(A)}\delta_n\lambda^n, \tag{6.3.9}$$

$$\delta_n=\frac{(-1)^n}{n}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & k(x_1,x_2) & \cdots & k(x_1,x_n)\\ k(x_2,x_1) & 0 & \cdots & k(x_2,x_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k(x_n,x_1) & k(x_n,x_2) & \cdots & 0\end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n. \tag{6.3.10}$$

这里的 $D^*(\lambda)$ 是方程 $f(x)-\lambda Af(x)=g(x)$ 的 Fredholm 行列式 (Fredholm determinant, regularized characteristic determinant). $D^*(\lambda)$ 是一个关于 λ 的整函数, 也可以展开成无穷积的形式

$$D^*(\lambda)=\prod_{s=1}^{v(A)}(1-\lambda\lambda_s)\mathrm{e}^{\lambda\lambda_s}, \tag{6.3.11}$$

其中, λ_s 是 $f(x)-\lambda Af(x)=0$ 的特征值.

定理 6.3.2 设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\cdots$ 是 T 的特征值, 则

$$\mathrm{tr}T^n=\sum_{s=1}^{v(T)}\lambda_s^n,\quad n\geqslant 2. \tag{6.3.12}$$

证明 由引理 6.2.2 知任一 Hilbert-Schmidt 型算子均与唯一的具有平方可积核的积分算子等价, 即 $T\leftrightarrow A: L^2[0,1]\mapsto L^2[0,1]$, 其中

$$Af=\int_0^1 k(x,t)f(t)\mathrm{d}t,\quad f\in L^2[0,1],$$

而且 $\int_0^1\int_0^1|k(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$.

下面证明

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln D^*(\lambda)=\sum_{n=2}^{\infty}w_n\lambda^{n-1}, \tag{6.3.13}$$

其中, $D^*(\lambda)$ 是算子 A 的 Fredholm 行列式,

$$w_n=\int_0^1\cdots\int_0^1 k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)\cdots k(x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(1) 当 $\overline{k}(x,t)$ 是一个有界核, 且 $x=t$ 时, $\overline{k}(x,t)=0$. 令

$$\bar{\sigma}_n=\frac{(-1)^n}{n}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & \overline{k}(x_1,x_2) & \cdots & \overline{k}(x_1,x_n)\\ \overline{k}(x_2,x_1) & 0 & \cdots & \overline{k}(x_2,x_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \overline{k}(x_n,x_1) & \overline{k}(x_n,x_2) & \cdots & 0\end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\overline{D^*(\lambda)}=\frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\bar{\sigma}_n\lambda_{n-1}}{1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\bar{\sigma}_n\lambda_n},$$

而且 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\overline{D^*(\lambda)}$ 是 λ 的整函数, 并且有展开式 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\overline{w_n}\lambda^{n-1}$. 比较系数得

$$\overline{w_2}=-2\overline{\sigma_2},\quad \overline{w_3}=-3\overline{\sigma_3},\quad \overline{w_4}=-4\overline{\sigma_4}-2\sigma_2^2,\quad \cdots,$$

$$\overline{w_n}=\int_0^1\cdots\int_0^1\overline{k}(x_1,x_2)\overline{k}(x_2.x_3)\cdots\overline{k}(x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(2) 当 $k(x,t)$ 是一般的积分核, 且 $\int_0^1\int_0^1|k(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$ 时, 由于 $k(x,t)$ 是平方可积的, 故存在一个有界序列 $\overline{k_s}(x,t)$, 使得

$$\int_0^1\int_0^1\left|k(x,t)-\overline{k_s}(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty.$$

每个有界 $\overline{k_s}(x,t)$ 对应相应的 $\overline{\sigma}_n^{(s)}$, 由 $\overline{\sigma}_n^{(s)}$ 的构造可知, $\overline{\sigma}_n^{(s)}\to\sigma_n,\overline{w}_n^{(s)}\to w_n$, 而每个

$$\overline{w_n}^{(s)}=\int_0^1\cdots\int_0^1\overline{k}^{(s)}(x_1,x_2)\overline{k}^{(s)}(x_2.x_3)\cdots\overline{k}^{(s)}(x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

故 $w_n=\lim\limits_{s\to\infty}\overline{w}_n^{(s)}=\int_0^1\cdots\int_0^1 k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)\cdots k(x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$. 这就证明了式 (6.3.13). 据此可得

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln D^*(\lambda)&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln\prod_{s=1}^{\infty}(1-\lambda\lambda_s)\mathrm{e}^{\lambda\lambda_s}\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\sum_{s=1}^{\infty}\ln(1-\lambda\lambda_s)\mathrm{e}^{\lambda\lambda_s}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^n\right)\lambda^{n-1}.\end{aligned}\tag{6.3.14}$$

比较式 (6.3.13) 与式 (6.3.14) 得 $w_n = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^n$, 而 $\operatorname{tr} T^n = w_n$, 故 $\operatorname{tr} T^n = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^n$. □

定理 6.3.3 设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, T 只有一个谱点 $\lambda = 0$, 则 T 的所有幂次的迹等于 0, 即 $\operatorname{tr}T^n = 0 (n \geqslant 2)$.

证明 若 T 只有一个谱点 $\lambda_s = 0$, 则根据

$$D^*(\lambda) = \prod_{s=1}^{\infty} (1 - \lambda\lambda_s) \mathrm{e}^{\lambda\lambda_s}$$

可得 $D^*(\lambda) = 1$. 所以 $0 = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln D^*(\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} w_n \lambda^{n-1}$, 因而 $w_n = 0 (n \geqslant 2)$, 故 $\operatorname{tr}T^n = 0 (n \geqslant 2)$. □

6.3.2 Hilbert-Schmidt 型算子根子空间系的完备性

定理 6.3.4 设 T 是定义在可分 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, 若 $T = T_R + \mathrm{i}T_I = T_{\Re} + \mathrm{i}T_{\Im} \left(T_R = T_{\Re} = \dfrac{1}{2}(T + T^*),\ T_I = T_{\Im} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*) \right)$, 其中 T_R 与 T_I 是定号的, 即对 $\forall f \in X$, $(T_R f, f) = \Re(Tf, f)$ 和 $(T_I f, f) = \Im(Tf, f)$ 不变号, 则算子 T 的根空间在 $R(T)$ 中形成的一个完备系. 上述完备系再加上 $Tf = 0$ 的解空间的一个基, 形成了空间 X 的一个完备系.

证明 令 D_1 表示 T 的根空间 (非零点谱的特征向量及其共轭向量的线性闭包), 并设 $X = D_1 \oplus D_2$, D_2 与 D_1 直交.

由定理 6.1.6 可知, 要得到定理的结论只需证明 $T^*_{D_2} = T^*|_{D_2} \equiv 0$, 其中 T^* 是 T 的共轭算子. 设 $T^*_{D_2} = A - \mathrm{i}B$, A, B 是自伴算子.

不失一般性, 假设 T_R, T_I 均为正定算子, 即对 $\forall f \in X, (T_R f, f) = \Re(Tf, f) \geqslant 0$, $(T_I f, f) = \Im(Tf, f) \geqslant 0$, 则 A, B 也是非负算子, 这是因为 $\forall g \in D_2$,

$$\begin{aligned}(Ag, g) &= \Re(T^*_{D_2} g, g) = \Re(T^* g, g) = \Re(g, Tg) \\ &= \Re(\overline{Tg, g}) = \Re(Tg, g) = (T_R g, g) \geqslant 0, \\ (Bg, g) &= -\Im(T^*_{D_2} g, g) = -\Im(T^* g, g) = -\Im(g, Tg) \\ &= \Im(\overline{Tg, g}) = \Im(Tg, g) = (T_I g, g) \geqslant 0.\end{aligned}$$

由于 $T^*_{D_2}$ 只有零谱点, 所以 $\operatorname{tr}(T^*_{D_2})^2 = 0$. 设 $\phi_1, \cdots, \phi_s \cdots$ 是自伴算子 B 的特征向量所生成特征空间的规范正交基,

$$\operatorname{tr}(T^*_{D_2})^2 = \sum_s (T^{*2}_{D_2} \phi_s, \phi_s).$$

$$\Im((T_{D_2}^*)^2\phi_s,\phi_s)=\Im((A-\mathrm{i}B)\phi_s,(A+\mathrm{i}B)\phi_s)=-2\lambda_s(A\phi_s,\phi_s),$$

由于 $A\geqslant 0, B\geqslant 0$, 所以 $\lambda_s\geqslant 0$, 而又由

$$0=\Im\mathrm{tr}(T_{D_2}^*)^2=-2\sum_s\lambda_s(A\phi_s,\phi_s)$$

得

$$\lambda_s(A\phi_s,\phi_s)=0,\quad s=1,2,\cdots.$$

下面证明 $\lambda_s=0,\ s=1,2,\cdots$. 若不然, 不妨设 $\exists\lambda_s^0\neq 0$, 但由 $\lambda_s^0(A\phi_s^0,\phi_s^0)=0$, 可知

$$(A\phi_s^0,\phi_s^0)=0,$$

而又由于 ϕ_s^0 是 B 的对应 λ_s^0 的特征向量, $\phi_s^0\neq 0$, A 是非负的,

$$(A^{\frac{1}{2}}\phi_s^0,A^{\frac{1}{2}}\phi_s^0)=0,\quad A^{\frac{1}{2}}\phi_s^0=0,$$

所以, $A\phi_s^0=0$, 从而

$$T_{D_2}^*\phi_s^0=A\phi_s^0-\mathrm{i}B\phi_s^0=-\mathrm{i}\lambda_s^0\phi_s^0. \tag{6.3.15}$$

又因为 $T_{D_2}^*$ 只有零谱点, 式 (6.3.15) 说明 $-\mathrm{i}\lambda_s^0$ 也是 $T_{D_2}^*$ 的谱点, 矛盾. 所以 $\lambda_s=0, s=1,2,\cdots$.

再证明 D_1 在 $R(T)$ 中完备. 由于 $\lambda_s=0(s=1,2,\cdots)$, B 是紧自伴算子, 则 $B=0$. 从而 $T_{D_2}^*=A$ 是一个自伴算子, 而 $T_{D_2}^*$ 只有零实谱, 所以, $T_{D_2}^*=0$, 根据定理 6.1.6 可知, D_1 在 $R(T)$ 中完备.

最后说明, $D_1\cup N(T)$ 在 X 中完备, 其中 $N(T)=\{f\in X\mid Tf=0\}$. 只需证明, D_1 的直交补 D_2 包含在 $N(T)$ 中. $\forall f\in N(T)$, $\quad 0=Tf=T_Rf+\mathrm{i}T_If$, 又由于 T_R, T_I 非负, 所以, $T_Rf=0, T_If=0$, 从而

$$T^*f=T_Rf-\mathrm{i}T_If=0,$$

$f\in N(T^*)$, 反之亦然, 故 $N(T)=N(T^*)$. 又由于 $R(T)\oplus N(T^*)=X$ 和 $D_2\subset R(T)^{\perp}$, 所以, $D_2\subset N(T^*)=N(T)$. 因而 $D_1\cup N(T)$ 在 X 中完备. □

注 1　定理中条件 T_R, T_I 不变号是必要的, 缺一不可的.

例 6.3.5　定义在 $L^2[0,1]$ 上的积分算子

$$Af=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则 $A_Rf=\frac{1}{2}(A+A^*)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f\mathrm{d}x+\int_x^1 f\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 从而

$$(A_Rf,f)=\int_0^1\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\overline{f(x)}\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right|^2>0,$$

但 A_I 变号, D_1 在 $R(A)$ 中不完备, A 只有零谱点.

例 6.3.6 定义在 $L^2[0,1]$ 上的积分算子 B: $\forall f\in L^2[0,1]$,

$$Bf=\int_0^1\frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则

$$B_Rf=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t.$$

从而

$$(B_Rf,f)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\frac{f(t)\overline{f(x)}}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

但 (B_Rf,f) 变号, D_1 在 $R(B)$ 中不完备,

注 2 T_R,T_I 的符号只有有限个特征值改变, 其余情况不变号, 结论也不成立.

例 6.3.7 定义在 $L^2[0,1]$ 上的积分算子 C: $\forall f\in L^2[0,1]$,

$$Cf=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$C_Rf=\frac{1}{2}\int_0^1|x-t|\,f(t)\mathrm{d}t.$$

算子 C_R 只有一个正的特征值 $\lambda_0=\frac{1}{\tau_0^2}$, 其中 τ_0 是方程 $\tan\frac{\tau}{2}=\frac{2}{\tau}$ 的实根. 其余谱点均为负值, $\lambda_{2k+1}=-\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}$, $\lambda_{2k}=-\frac{1}{\tau_k^2}(k=0,1,\cdots)$, 其中 τ_k 是方程 $\tan\frac{\tau}{2}=-\frac{2}{\tau}$ 的正根. $C_I=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^1(x-t)f(t)\mathrm{d}t$, C_I 是有限秩算子, 有两个非零的特征值, $\frac{1}{4\sqrt{3}},-\frac{1}{4\sqrt{3}}$, C 的特征系及其共轭所生成的子空间在 $R(C)$ 中不完备.

下面介绍另一个完备性定理.

定理 6.3.8 设 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 Hilbert-Schmidt 型算子, 若二次型

$$D(f)=(T^2f,f),\quad\forall f\in X,\tag{6.3.16}$$

的值包含在某半个平面内, 或者 $\exists\sigma > 0$, 使得

$$\Im(e^{i\sigma}D(f)) \geqslant 0, \tag{6.3.17}$$

则 T 的根空间在 $R(T^2)$ 中完备.

证明　不失一般性, 假设 T^2 的虚部是正定算子. 若不然, 可以考虑算子 $e^{i\frac{\sigma}{2}}T$. 令 D_1 是 T 的根空间, $X = D_1 \oplus D_2$, D_2 与 D_1 直交. 只需证明, $\forall h \in X$, $T^2h \in D_2$ 即可. 由于 $T^*_{D_2}$ 只有零实谱, 即 $\mathrm{tr}(T^*_{D_2}) = 0$, 从而,

$$\mathrm{tr}(T^*_{D_2})^2 = 0.$$

又因为 T^2 的虚部是半正定的, 即 $\Im(T^2f, f) \geqslant 0, \forall f \in X$, 所以

$$0 \leqslant \Im(T^2f, f) = \Im(f, T^2f) = \Im(f, (T^*)^2f), \quad \forall f \in D_2,$$

即 $(T^*_{D_2})^2 = (T^*)^2|_{D_2}$ 的虚部是负半定的. 又 $\mathrm{tr}\Im(T^*_{D_2})^2 = 0$, 从而 $\Im(T^*_{D_2})^2 = 0$. 所以, $(T^*_{D_2})^2 = (T^*)^2|_{D_2} = \Re(T^*_{D_2})^2$, 即 $(T^*_{D_2})^2$ 是自伴算子, 而且只有零点谱, 故 $(T^*_{D_2})^2 = 0$. 对于任意的 $h \in X, g \in D_2$, $(T^2h, g) = (h, T^*T^*g) = (h, (T^*_{D_2})^2g) = 0$, 得 $T^2h \in D_1$, 由定理 6.1.6 知, D_1 在 $R(T^2)$ 中完备. □

6.4　耗散算子及其根子空间系的完备性

设 X 是 Hilbert 空间, A 是 X 上的线性算子, 引入一类新的算子.

定义 6.4.1　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的线性算子, 若对于任意的 $y \in D(A)$, 恒有

$$\Im(Ay, y) \geqslant 0, \tag{6.4.1}$$

则称 A 为耗散算子 (dissipative operator).

若 A 是 X 上的有界线性算子, 则 A 是耗散算子的充分必要条件是 A 的虚部

$$A_I = A_{\Im} = \frac{1}{2i}(A - A^*) \tag{6.4.2}$$

是非负的. A 的实部为 $A_R = A_{\Re} = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$.

定义 6.4.2　若 A 与 A^* 具有共同的不变子空间 $D(\neq \{0\})$, 在 D 上 $A = A^*$, 即 $A|_D = A^*|_D$, 则称 A 为非简单 (nonsimple) 算子, 否则称 A 是简单 (simple) 算子. 如果一个紧算子没有非零的特征值, 则称这个算子为 Volterra 算子.

(1) 若 A 是非简单算子, 则存在 X 关于 A 和 A^* 的非零的最大子空间 $D_M = D_M(A)$, 在 D_M 上, $A = A^*$, 称 D_M 为 A 的平凡子空间.

(2) 若 A 是简单算子, 则 $D_M = \{0\}$; 若 A 是自伴算子, 则 $D_M = X$.

(3) $\forall f \in D_M, A^n f = (A^*)^n f$, $D_M(A) = D_M(A^*)$.

(4) 任何有界的非简单算子 A 对应一个唯一分解

$$X = D_1 \oplus D_2, \tag{6.4.3}$$

且在 $D_M(A) = D_1$ 上, $A = A^*$; 而 $A|_{D_2}$ 是简单算子.

(5) 对一个耗散算子 A 而言, 一个非零的平凡子空间 $D_M(A)$ 与 A 的最大不变子空间重合, 并且 $A|_{D_M}$ 是一个自伴算子.

事实上, 在 D_M 上, $A = A^*$, 则 $A|_{D_M}$ 是一个自伴算子. 设 D_1 是 A 的不变子空间, 并且 $A|_{D_1}$ 是自伴的, 则 $\forall f \in D_1, (A_I f, f) = \Im(Af, f) = 0$. 又由于 $\Im A$ 非负, 所以 $\Im A|_{D_1} = 0$, $A_I|_{D_1} = 0$, 从而

$$Af = A^* f, \quad f \in D_1, \tag{6.4.4}$$

所以, $D_1 \subset D_M(A)$.

(6) 一个紧耗散算子的平凡子空间与算子所有实特征值 (如果零是特征值, 也包含零特征值) 对应的特征向量线性包的闭包重合.

引理 6.4.3 设 A 是一个线性耗散的紧算子, D_1 表示所有根向量线性包的闭, 若 $D_2 = D_1^{\perp} \neq \{0\}$, 则 $P_0 A P_0$ 在 D_2 上是一个简单的耗散 Volterra 算子, 其中 P_0 是 X 到 D_2 上的投影算子.

证明 设 A 是 X 上的紧算子, $\hat{A} = A|_{D_2'}$, $D_2' = X \ominus D_M(A)$, 其中, $D_M(A)$ 是关于 A, A^* 的最大不变子空间, $\forall f \in D_M(A)$, $Af = A^* f$. 由 (5) 和 (6) 可知 $D_1 \supset D_M$, 则 $D_2 \subset D_2'$, $\hat{A} = A|_{D_2'}$ 是简单耗散算子. 所以, $A|_{D_2}$ 是一个简单耗散算子. 即 $P_0 A P_0$ 是一个简单耗散算子.

由于 D_1 包含 A 的所有根向量, 在 $D_2 = X - D_1$ 上, A 只能有零特征值, 故 $A|_{D_2}$ 是一个 Volterra 算子.

综上所述, $P_0 A P_0$ 是一个简单的耗散 Volterra 算子. □

(7) A 是定义在 X 上的一个线性耗散算子, D_M 是 A 的平凡不变子空间, 根据上面讨论, $X = D_M \oplus D_2$. 若令 $A_1 = A|_{D_M}, A_2 = A|_{D_2}$, 则 A_1 是一个定义在 D_M 上的自伴算子, A_2 是定义在 D_2 上的简单耗散算子, 且

$$A = A_1 \oplus A_2. \tag{6.4.5}$$

定理 6.4.4 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的一个线性耗散紧算子, 并且 $\mathrm{tr} A_I < \infty$, 则 A 的根子空间系 D_1 在 X 内完备的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{v(A)} \Im \lambda_j(A) = \mathrm{tr} A_I, \tag{6.4.6}$$

其中, λ_j 是 A 的特征值, $v(A)$ 是特征值的个数 (包括重数 (几何)).

证明 必要性. 若 A 的根子空间系 D_1 在 X 内完备, 在 D_1 内选取一组规范正交基 $\{w_j\}$, 使得

$$(Aw_j, w_j) = \lambda_j,$$
$$(A_I w_j, w_j) = \Im\lambda_j,$$

所以

$$\mathrm{tr}A_I = \sum_{j=1}^{\infty}(A_I w_j, w_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\Im\lambda_j.$$

充分性. 记 D_0 为 A 的所有非实特征值对应的根向量线性包的闭集, 设 $\overline{A} = A|_{D_0}$, $\{u_j\} \subset D_0$ 是 D_0 内规范正交基, 使得

$$\sum_j(\overline{A_I}u_j, u_j) = \sum_j \Im\lambda_j(\overline{A}) = \sum_j \Im\lambda_j.$$

由式 (6.4.6) 得

$$\sum_j(A_I u_j, u_j) = \mathrm{tr}A_I.$$

由于 A_I 非负, 所以, 在 $D_0^{\perp} = X - D_0$ 上, $A_I = 0$, 从而

$$Af = A_R f = A^* f, \quad \forall f \in D_0^{\perp}. \tag{6.4.7}$$

从式 (6.4.7) 得到 A 在 $D_0^{\perp}$ 上是自伴算子.

若 A 是一个简单算子, 则 $D_0^{\perp} = \{0\}$. 若 A 是一个非简单紧算子, 则在 $D_0^{\perp}$ 上存在 A 的一个完备的特征系. 综合上述两种情况, 结论正确. □

上述结论应用在积分算子上可得如下结论.

例 6.4.5 设 $k(t,s)$ 是一个 Hilbert-Schmidt 型核, K 是定义在 $L^2[a,b]$ 上由 $k(t,s)$ 为核生成的积分算子, 设 $k_I(t,s) = (k(t,s) - \bar{k}(t,s))/2\mathrm{i}$ 是一个对称的非负核, 满足

$$S = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{4h^2}\int_a^b\int_a^b [2h - |t-s|]\, k_I(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty,$$

则积分算子 K的根子空间系在 $L^2[a,b]$ 中完备的充要条件是

$$\sum_j \Im\lambda_j = S,$$

其中, λ_j 表示 K 的特征值, $S = \int_a^b k_I(t,t)\mathrm{d}t = \mathrm{tr}K_I$.

推论 6.4.6 设 $A = A_R + \mathrm{i}A_I$ 是定义在 Hilbert 空间 X 上的算子, A_I 是有限秩算子且不变号, A_R 是紧算子, 则 A 的所有非零点谱对应的根向量的线性包的闭在 $R(A)$ 中完备.

定义 6.4.7 $C(X)$ 表示 Hilbert 空间 X 上所有紧算子的全体, $C_p(X)(0 < p < \infty)$ 表示 $C(X)$ 中所有满足 $\sum_j |\lambda_j(A)|^p < \infty$ 的算子 A 的全体, 其中 $\{\lambda_j(A)\}$ 是算子 A 的特征值. 显然, $C_1(X)$ 是所有具有迹的紧算子, 也称为核算子 (nuclear operator), $C_2(X)$ 是所有的 Hilbert-Schmidt 型算子全体.

当 $K \in C_1(X)$ 是一个核算子, K 的特征行列式

$$D_K(\mu) = \det(I - \mu K) = \prod_{j=1}^{v(K)} (1 - \mu\mu_j(K)). \tag{6.4.8}$$

在 $\mathbb{C}$ 的任何紧子集上一致收敛, 所以, $D_K(\mu)$ 是 μ 的整函数.

对于一个 Hilbert-Schmidt 型算子 $K \in C_2(X)$, K 的 Fredholm 行列式

$$D_K^*(\mu) = \prod_{j=1}^{v(K)} (1 - \mu\mu_j(K))\mathrm{e}^{\mu\mu_j(K)}. \tag{6.4.9}$$

在 $\mathbb{C}$ 的任何紧子集上一致收敛, 所以, $D_K^*(\mu)$ 也是 μ 的整函数.

设 S 和 $T \in B(X)$ 是 X 上的有界算子, $S - T \in C_1(X)$ 是核算子. 如果 $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(T)$, 即算子 $I - \mu T$ 在空间 X 上有有界逆, 则

$$(I - \mu S)(I - \mu T)^{-1} = I - \mu(S - T)(I - \mu T)^{-1}, \tag{6.4.10}$$

所以 $(S - T)(I - \mu T)^{-1}$ 也是核算子, 其特征行列式

$$D_{S/T}(\mu) = \det[(I - \mu S)(I - \mu T)^{-1}] = \det\left(I - \mu(S - T)(I - \mu T)^{-1}\right) \tag{6.4.11}$$

称为算子 T 在算子 $K = S - T$ 摄动下的特征行列式.

注 1 显然, 若 $A \in C_1(X)$, 则

$$D_A^*(\mu) = D_A(\mu)\mathrm{e}^{\mu \mathrm{tr} A}; \tag{6.4.12}$$

$$|D_A(\mu)| \leqslant \prod_{j=1}^{v(K)} (1 + |\mu| s_j(A)), \tag{6.4.13}$$

其中, $s_j(A)$ 是算子 $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 的第 j 个特征值.

注 2　$A \in C_2(X)$, 则

$$|D_A^*(\mu)| \leqslant e^{\frac{1}{2}|\mu|^2 \operatorname{tr}(A^*A)}. \tag{6.4.14}$$

事实上,

$$|D_A^*(\mu)|^2 = \prod_{j=1}^{v(A)} |1-\mu\lambda_j|^2 e^{2\Re(\mu\lambda_j)} = \prod_{j=1}^{v(A)} (1-2\Re(\mu\lambda_j)+(\mu\lambda_j)^2) e^{2\Re(\mu\lambda_j)}.$$

又因为 $1+x \leqslant e^x$, 所以,

$$|D_A^*(\mu)|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{v(A)} |e^{(-2\Re(\mu\lambda_j)+(\mu\lambda_j)^2)}| e^{2\Re(\mu\lambda_j)} = e^{|\mu|^2 \sum\limits_{j=1}^{v(A)} |\lambda_j|^2}.$$

而又由于

$$\sum_{j=1}^{v(A)} |\lambda_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{v(A)} s_j^2(A) = \operatorname{tr}(A^*A),$$

其中 $s_j(A)$ 是 $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 的特征值, 故

$$|D_A^*(\mu)| \leqslant e^{\frac{1}{2}|\mu|^2 \operatorname{tr}(A^*A)}.$$

注 3　若 $S, T \in C_1(X)$, 则 $D_{S/T}(\mu) = \dfrac{D_S(\mu)}{D_T(\mu)}$.

定理 6.4.8　若 $A, B \in C_2(X)$, 则对算子 $I - C = (I-A)(I-B)$ 有

$$D_C^*(1) e^{\operatorname{tr}(AB)} = D_A^*(1) D_B^*(1), \tag{6.4.15}$$

其中, $C = A + B - AB$.

证明　由于 $A, B \in C_2(X)$, 并设 $\{\phi_j\}$ 是 X 的任意规范正交基, 则

$$D_A^*(1) = \lim_{n\to\infty} \det[\delta_{jk} - (A\phi_j, \phi_k)]_1^n e^{\sum\limits_{j=1}^{n} (A\phi_j, \phi_j)}.$$

令 P_n 是 $\{\phi_j\}_{j=1}^n \subset \{\phi_j\} \subset X$ 上的投影算子, 则 $A_n = P_n A P_n$, $B_n = P_n B P_n$ 均为有限秩算子, 而且,

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \phi_j) A\phi_j \to A, \quad B_n = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \phi_j) B\phi_j \to B \quad (n \to \infty),$$

$$D_{A_n}^*(1) = \det[\delta_{jk} - (A\phi_j, \phi_k)]_1^n e^{\sum\limits_{j=1}^{n} (A\phi_j, \phi_j)} = D_{A_n}(1) e^{\operatorname{tr} A_n},$$

$$D^*_{B_n}(1)=\det[\delta_{jk}-(B\phi_j,\phi_k)]_1^n \mathrm{e}^{\sum\limits_{j=1}^{n}(B\phi_j,\phi_j)}=D_{B_n}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{tr}B_n}.$$

并且

$$D^*_{A_n}(1)D^*_{B_n}(1)=D_{A_n}(1)D_{B_n}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A_n+B_n)}.$$

又由于 $D_{A_n}(1)D_{B_n}(1)=D_{C_n}(1)$, 其中 $C_n=P_nCP_n=A_n+B_n-A_nB_n$, 所以

$$D_{A_n}(1)D_{B_n}(1)=D_{C_n}(1).$$

从而

$$\begin{aligned}D^*_{A_n}(1)D^*_{B_n}(1)&=D_{C_n}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A_n+B_n)}\\&=D^*_{C_n}(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}(A_n+B_n-A_nB_n)}\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A_n+B_n)}\\&=D^*_{C_n}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A_nB_n)}.\end{aligned}$$

在上式中, 当 $n\to\infty$ 时, 便得结论. □

定理 6.4.9 设 S 和 T 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 使得 $S-T$ 是核算子. 若 $\dfrac{1}{\mu}\notin\sigma(T)$, 则

$$D_{S/T}(\mu)=\frac{D^*_S(\mu)}{D^*_T(\mu)}\mathrm{e}^{\mu\mathrm{tr}(T-S)}. \tag{6.4.16}$$

证明 根据式 (6.4.11) 和式 (6.4.12) 及定理 6.4.8, 简单计算便得结论. □

定理 6.4.10 定义在 X 上的有界耗散算子 A 的谱包含在闭的上半平面 $\Im\lambda\geqslant 0$, 而且对 $\forall\Im\lambda<0$, 有

$$|(A-\lambda I)^{-1}|\leqslant\frac{1}{\Im\lambda}. \tag{6.4.17}$$

证明 $\forall x\in X$, $\forall\Im\lambda<0$,

$$\Im[(Ax,x)-\lambda(x,x)]=(A_{\Im}x,x)-\Im\lambda(x,x)\geqslant|\Im\lambda|(x,x).$$

若 $\|x\|=1$, 则

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant|((A-\lambda I)x,x)|\geqslant|\Im\lambda|(x,x)=|\Im\lambda|.$$

根据上述两个不等式便得定理的结论. □

定理 6.4.11 设 S 和 T 是有界耗散算子, 使得 $K=S-T$ 是核算子, 则对于任意 $\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 极限

$$\lim_{\rho\mapsto\infty}\frac{\ln|D_{S/T}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{\rho}=0 \tag{6.4.18}$$

关于 θ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_0,\dfrac{\pi}{2}+\theta_0\right)$ 上一致收敛.

证明　根据的定义可知

$$D_{S/T}(\mu)=\det[(I-\mu S)(I-\mu T)^{-1}]=\det(I-\mu(S-T)(I-\mu T)^{-1})=\det(I-\mu KB(\mu)),$$

其中, $B(\mu)=(I-\mu T)^{-1}$, 用 $s_j(C)$ 表示算子 $|C|=(C^*C)^{\frac{1}{2}}$ 的第 j 个特征值, 则根据式 (6.4.13) 得

$$|D_{S/T}(\mu)|\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}(1+|\mu|s_j(KB(\mu)).$$

另外, 根据定理 6.4.10, 对 $\Im\mu>0$, 有

$$\|\mu B(\mu)\|=\|(T-\mu^{-1})^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\left|\Im\left(\frac{1}{\mu}\right)\right|}=\frac{|\mu|^2}{|\Im\mu|},$$

即对 $\forall\mu=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0<\theta<\pi)$, 有

$$|B(\mu)|\leqslant\frac{1}{\sin\theta},$$

从而,

$$s_j(AB(\mu))\leqslant\frac{s_j(K)}{\sin\theta},\quad j=1,2,\cdots.$$

所以,

$$|D_{S/T}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\rho s_j(K)}{\sin\theta}\right)\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\rho s_j(A)}{\sin\theta}\right)\mathrm{e}^{\frac{\rho}{\sin\theta}\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}s_j(K)}$$

由于 $K=S-T$ 是核算子, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}s_j(K)$ 绝对收敛, 所以,

$$\limsup_{\rho\mapsto\infty}\frac{\ln|D_{S/T}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{\rho}\leqslant 0.$$

S 和 T 都是有界耗散算子, 交换 S 和 T, 根据 $D_{S/T}(\mu)$ 的定义有 $\ln|D_{S/T}(\mu)|=-\ln|D_{T/S}(\mu)|$, 故结论得证. □

定理 6.4.12　设 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的一个简单算子或紧算子, 若 $A_I\in C_1(X)$, 则算子 A 的特征值 $\{\lambda_j\}$ 满足

$$\sum_j|\Im\lambda_j(A)|=\|A_I\|\left(=\sum_j|\sigma_j|\right)\tag{6.4.19}$$

的充要条件是①A 具有完备的根向量系, ②A 能分解成两个耗散算子的直接差. 其中, $\{\sigma_j\}=\sigma_d(A_I)$.

证明 充分性. 若条件①和条件②成立, 且 $A = A_1 - A_2 (A = A_1 \ominus A_2)$, 则 A_1, A_2 在相应的子空间上也具有性质①, 由定理 6.4.4 可知

$$\sum_j \Im\lambda_j(A_k) = \mathrm{tr}(A_k)_I, \quad k = 1, 2.$$

又 $\sigma_d(A) = \sigma_d(A_1) \cup \sigma_d(A_2)$, 并且

$$\|A_I\|_1 = \|(A_1)_I\|_1 + \|(A_2)_I\|_1 .$$

由此得公式 (6.4.19).

必要性. 设对于算子 A 公式 (6.4.19) 成立. 用 D_A 表示 A 的所有非零特征值对应的根向量的线性包的闭, 设 $\{w_j\}$ 是 D_A 的一组基, 并且满足

$$(A_I w_j, w_j) = \Im\lambda_j(A), \quad j = 1, 2, \cdots,$$

从而

$$\sum_j |(A_I w_j, w_j)| = \|A_I\| .$$

令 $D_0 = D_A^{\perp}$, 设 U 是定义在 X 上的算子满足: $\forall f \in D_0, Uf = f$, $Uw_j = \delta_j w_j (j = 1, 2, \cdots)$, 其中

$$\delta_j = \mathrm{sgn}\Im\lambda_j(A) = \begin{cases} 1, & \Im\lambda_j(A) > 0, \\ 0, & \Im\lambda_j(A) = 0, \\ -1, & \Im\lambda_j(A) < 0. \end{cases}$$

显然算子 UA_I 是非负的, 在 D_0 上, $UA_I = 0$. 又因为 D_0, D_A 是算子 A_I, A_R, A, A^* 的不变子空间, 而且 $A_I f = 0, \forall f \in D_0$, 因此, A 在 D_0 上是自伴算子, 而且 A 在 D_0 没有非零特征值. 所以,

$$AD_0 = A_R D_0 = \{0\}.$$

根据上面讨论显然有 A 的根子空间系是完备的.

由算子 U 的定义可知, $A_I U$ 是自伴算子, 所以, U 与 A_I 是可交换的, 即

$$UA_I = A_I U.$$

关于 D_A 中的基 $\{w_j\}$, 算子 A 对应的一个三角矩阵

$$[(Aw_k, w_j)]_{jk} = [a_{jk}], \quad a_{jk} = 0, \ j > k.$$

同样在基 $\{w_j\}$ 下, 算子 A_I 对应一个矩阵 $[h_{jk}]_{jk}$, 其中,

$$h_{jk} = \frac{a_{jk}}{2\mathrm{i}},\ j < k, \quad h_{jk} = -\frac{\overline{a}_{jk}}{2\mathrm{i}}, \quad j > k. \tag{6.4.20}$$

算子 UA_I 与 A_IU 分别对应如下矩阵:

$$[\delta_j h_{jk}], \quad [h_{jk}\delta_k].$$

由于 U 与 A_I 是可交换, 则 $\delta_j h_{jk} = h_{jk}\delta_k$. 从而

$$h_{jk} = 0, \quad \sigma_j \neq \sigma_k. \tag{6.4.21}$$

根据式 (6.4.20) 和式 (6.4.21) 可得

$$\delta_j a_{jk} = a_{jk}\delta_k.$$

所以, U 与 A 也是可交换的, 即 $AU = UA$. 设

$$P = \frac{I+U}{2}, \quad Q = \frac{I-U}{2},$$

显然 P, Q 是两个投影算子, 而且 $PQ = QP = 0, P + Q = I$, A, A_R, A_I 分别与 P, Q 可交换. 令

$$\begin{cases} A_1 = PAP = PA_RP + \mathrm{i}PA_IP, \\ -A_2 = QAQ = QA_RQ + \mathrm{i}QA_IQ, \end{cases}$$

则 $A = A_1 - A_2$. 又由于 UA_I 非负, 所以, PA_IP 和 $-QA_IQ$ 是非负的, 故 A_1, A_2 是耗散算子, 并且 A 能分解成这两个耗散算子的直接差. □

定理 6.4.13 A 是定义在 Hilbert 空间 X 上的一个线性耗散紧算子, 并且 $A \in C_1(X)$, 则 A 的根子空间系 D_1 在 X 内完备.

证明 由于 $\sum_j \lambda_j(A) = \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A_R + \mathrm{i}\,\mathrm{tr}A_I$, 所以,

$$\sum_j \Im\lambda_j(A) = \mathrm{tr}A_I,$$

由定理 6.4.4 便得结论. □

6.5 增生算子

定义 6.5.1 T 是 Hilbert 空间 X 上的线性算子, 若 $\forall u \in D(T)$ 有 $\Re(Tu, u) \geqslant 0$, 则称 T 是增生算子 (accretive operator); 若 $\exists \alpha > 0$, $T + \alpha I$ 是增生算子, 则称 T 是拟增生算子(quasi-accretive operator).

若 T 是 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子, 则 T 是增生算子的充分必要条件是 T 的实部 $T_{\Re} = T_R = \frac{1}{2}(T^* + T)$ 非负.

若 T 是对称算子, $\forall u \in D(T)$, (Tu, u) 是实数, 则 T 是拟增生算子的充分必要条件为 $\Theta(T) = \{(Tu, u) \mid u \in D(T)\}$ 是下有界的. 若 $\forall u \in D(T)$ 有 $(Tu, u) \geqslant \gamma \|u\|^2$, 称 T 是下有界或下半有界的, 记为 $T \geqslant \gamma$. 所有具有以上性质的 γ 的上确界称为 T 的下界. 类似还可以定义 T 的上界. 对于一个稠定的线性算子 T, 如果 $\Theta(T) \neq \varnothing$, 则 T 是可闭的[20].

由此容易得到以下结论.

性质 6.5.2 稠定的增生算子 T 是可闭的且它的闭包也是一个增生算子.

因此, 我们通常考虑闭的增生算子. 设 $T \in L(X)$ 是增生算子, $\widetilde{\Delta}(T)$ 表示 T 的正则域之外的区域, 半平面 $\{\lambda \mid \Re\lambda < 0\}$ 在 $\widetilde{\Delta}(T)$ 内, 所以, 对于 $\Re\lambda < 0$, $T - \lambda \mathrm{I}$ 是一个半-Fredholm 算子, $\mathrm{null}(T - \lambda I) = 0$, 且 $\mathrm{def}(T - \lambda I) =$ 常数.

若 $\Re\lambda < 0$, $\mathrm{def}(T - \lambda I) = 0$, 则 $\{\lambda \mid \Re\lambda < 0\} \subset \rho(T)$, 且

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leqslant |\Re\lambda|^{-1}. \tag{6.5.1}$$

定义 6.5.3 线性算子 $T \in L(X)$, 若 T 满足式 (6.5.1), 则称 T 是 m-增生算子 (m-accretive operator). 若对于 $\alpha > 0$, $T + \alpha I$ 是 m-增生算子, 则称 T 是拟 m-增生算子(quasi-m-accretive operator).

定理 6.5.4 m-增生算子 T 是稠定的增生算子且没有增生扩张.

证明 设 T 是 m-增生算子, $\lambda = -\alpha < 0$. 由式 (6.5.1), 对于 $\forall u \in D(T)$,

$$\|u\|^2 \leqslant \alpha^{-2} \|(T + \alpha I)u\|^2 = \alpha^{-2}\left[\|Tu\|^2 + 2\alpha\Re(Tu, u) + \alpha^2\|u\|^2\right],$$

于是

$$0 \leqslant \alpha^{-1}\|Tu\|^2 + 2\alpha\Re(Tu, u).$$

当 $\alpha \to 0$, 有 $\Re(Tu, u) \geqslant 0$, 故 T 是增生算子.

下证 $D(T)$ 在 X 中稠密. 假设 $D(T)$ 在 X 中不稠密, 则存在一个非零元素 v, $v \perp D(T)$. 对于 $\Re\lambda < 0$ 有

$$0 = ((T - \lambda I)^{-1}v, v) = (w, (T - \lambda \mathrm{I})w),$$

这里 $w = (T - \lambda I)^{-1}v$. 因为 T 是增生算子,

$$0 = \Re((T - \lambda I)w, w) \geqslant |\Re\lambda| \, \|w\|^2,$$

所以, $w = 0$, 因而 $v = 0$, 矛盾, 故 $D(T)$ 在 H 中稠密.

若 S 是 T 的增生扩张, 不失一般性, 这里假设 S 是闭的, 则对于 $\Re\lambda < 0$, $(S-\lambda I)^{-1}$ 存在且为 $(T-\lambda I)^{-1}$ 的扩张. 由式 (6.5.1) 可知, $\lambda \in \rho(T)$. 因此, $(T-\lambda I)^{-1}$ 是定义在 X 上的. 所以, $S=T$. □

定理 6.5.5 稠定增生算子 T 是 m-增生算子的充分必要条件是对于 $\lambda \in \{\mu \mid \Re\mu < 0\}$,

$$R(T-\lambda I)=X. \tag{6.5.2}$$

证明 设 T 是 m-增生算子, 若 $\Re\lambda<0$, 由定义知 $R(T-\lambda I)=X$. 反之, 若 $\Re\lambda<0$, $R(T-\lambda I)=X$. 由性质 6.5.2 知存在 T 的闭包 $\overline{T}$, 有 $X=R(\overline{T}-\lambda I)$. 故对于 $u\in D(T)$, 存在 $v\in D(T)$, 满足 $\left(\overline{T}-\lambda I\right)u=(T-\lambda I)\,v$. 因此, $u-v\in N(\overline{T}-\lambda I)$. 而 $\overline{T}$ 是增生算子, 对于 $\Re\lambda<0$, $\mathrm{null}(\overline{T}-\lambda I)=0$. 所以, $\overline{T}=T$, 即 T 是闭的. □

定理 6.5.6 若 T 是 m-增生算子, 则 T^* 也是 m-增生算子.

证明 由定理 6.5.4 知, T^* 的扩张存在. 当 $\Re\lambda<0$ 时, $\lambda\in\rho(T)$. 所以, $\overline{\lambda}\in\rho(T^*)$. 特别当 $\Re\lambda<0$ 时, $R(T^*-\lambda I)=X$. 由定理 6.5.5 知, 只需证明 T^* 是增生算子. 因为 T 是可闭的, 所以 $D(T^*)$ 在 X 中稠密. 令 $u\in D(T^*)$, $\varepsilon>0$, 因为 $R(T+\varepsilon I)=X$, 所以, 存在 $v\in D(T)$, 满足 $(T^*+\varepsilon I)u=(T+\varepsilon I)\,v$.

$$((T^*+\varepsilon I)u,u)=((T+\varepsilon I)\,v,u)=(v,(T^*+\varepsilon I)u)=(v,(T+\varepsilon I)v)\,.$$

所以,

$$\Re(T^*u,u)+\varepsilon\left\|u\right\|^2>0.$$

令 $\varepsilon\to 0_+$, 则得 T^* 是增生算子. □

定理 6.5.7 (1) 闭对称算子 T 是 m-增生算子的充分必要条件为 T 是自伴算子且 $T\geqslant 0$.

(2) 闭的 J-对称算子 T 是 m-增生算子的充分必要条件为 T 是 J-自伴算子, 也是增生算子.

证明 (1) 若 $T\geqslant 0$ 且 T 是自伴算子, 则集合 $\Pi(T)$ 包含 $\{\lambda\mid\Re\lambda<0\}$. 当 $\Re\lambda<0$ 时, $\mathrm{def}(T-\lambda I)=0$, 由定义得 T 是 m-增生算子. 相反, 若 $T\geqslant 0$ 且 T 是对称的 m-增生算子, 则当 $\Re\lambda<0$ 时, $\mathrm{def}(T-\lambda I)=0$. 所以, T 是自伴算子.

(2) 若 T 是 J-自伴的增生算子, $\{\lambda\mid\Re\lambda<0\}\subset\Pi(T)$, 当 $\Re\lambda<0$ 时, $\mathrm{def}(T-\lambda I)=0$. 所以, T 是 m-增生算子. 相反, 若 T 是 J-对称的增生算子且 T 是 m-增生算子, 则当 $\Re\lambda<0$ 时, $\mathrm{def}(T-\lambda I)=0$. 所以 T 是 J-自伴算子. □

定理 6.5.8 S 是最大对称算子, 则 $T=\mathrm{i}S^*$ 是 m-增生算子.

证明 因为 S 是 T 的最大闭的对称扩张, 则 S 的亏指数中至少有一个亏指数等于零, 不妨设 $n_+(S)=0$, 则

$$D(T)=D(S^*)=D(S)\oplus N_-(S).$$

所以, 对于 $u\in D(T)$, 有

$$u=v+w,\quad v\in D(S),\quad w\in N_-(S),$$

$$Tu=\mathrm{i}Sv+\mathrm{i}S^*w=\mathrm{i}Sv+w.$$

因此,

$$\begin{aligned}(Tu,u)&=(\mathrm{i}Sv+w,v+w)=\mathrm{i}(Sv,v)+\mathrm{i}(Sv,w)+(w,v)+\|w\|^2\\&=\mathrm{i}(Sv,v)+\mathrm{i}(v,S^*w)+(w,v)+\|w\|^2\\&=\mathrm{i}(Sv,v)+2\mathrm{i}\Im(w,v)+\|w\|^2,\end{aligned}$$

即有

$$\Re(Tu,u)=\|w\|^2\geqslant 0.$$

故 T 是增生算子. 另外, 对于 $\Re\lambda<0$, 有

$$\operatorname{def}(T-\lambda I)=\operatorname{def}[\mathrm{i}(S^*+\mathrm{i}I)]=\operatorname{null}(S-\mathrm{i}\overline{\lambda}I)=0,$$

又因为 $\Im(\mathrm{i}\overline{\lambda})=\Re\lambda<0$, 所以, $\mathrm{i}\overline{\lambda}\in\Pi(S)$, 因而 T 是 m-增生算子. □

定义 6.5.9 T 是定义在 Hilbert 空间 X 中的线性算子, 若 T 的值域在扇形域

$$\left\{z\in\mathbb{C}\mid\Re z\geqslant\gamma,|\arg(z-\gamma)|\leqslant\theta<\frac{1}{2}\pi\right\}$$

内, 这里 $\gamma\in\mathbb{R}$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则称 T 是扇形算子(sectorial operator), γ 称为 T 的顶点 (vertex), θ 是一个半角 (semi-angle). 若 T 是扇形的拟 m-增生算子, 则称 T 是 m-扇形算子. 对于 $\beta\in(-\pi,\pi)$, $\delta\in\mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(T+\delta I)$ 是 m-扇形算子, 则称 T 是拟 m-扇形算子.

6.6 无界算子

6.6.1 具有紧逆的无界算子

设 L 是定义在 Hilbert 空间 X 上的稠密闭线性算子. $\rho(L)$ 表示 L 的正则集,

$$\rho(L)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\mid(\lambda I-L)^{-1}\in B(X),\ R(\lambda I-L)=X\right\},\tag{6.6.1}$$

而 $\sigma(L)=\mathbb{C}\setminus\rho(L)$ 称为算子 L 的谱.

定理 6.6.1 对于无界线性算子 L, 若存在 $\tilde{\lambda} \in \rho(L)$ 使得 $R_{\tilde{\lambda}} = (\tilde{\lambda}I - L)^{-1}$ 是紧算子, 则有

(1) $R_{\tilde{\lambda}}$ 有至多可列个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, \cdots \to 0$;

(2) 算子 L 包含有至多可列个孤立点谱 (特征值)$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s, \cdots \to \infty$, 且

$$\lambda_s = \frac{1}{\mu_s - \tilde{\lambda}}, \quad \mu_s = \frac{1}{\lambda_s} + \tilde{\lambda};$$

(3) $\forall \lambda \in \rho(L)$, 算子 $R_\lambda = (\lambda I - L)^{-1}$ 是紧算子;

(4) 特别地, 若 $R_{\tilde{\lambda}}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 则 R_λ 也是 Hilbert-Schmidt 型算子;

(5) 算子 L 对应于 μ_s 的根子空间 $N_{\mu_s} = \{f \in D(L) \mid (L - \mu_s I)^n f = 0,\ n \geqslant 1\}$ 是 $\lambda_s = \dfrac{1}{\mu_s - \tilde{\lambda}}$ 的根子空间, 则 N_{μ_s} 与 N_s 重合, 即

$$N_{\mu_s} = N_s. \tag{6.6.2}$$

证明 由关系式

$$L - \mu_s I = L - \tilde{\lambda}I - (\mu_s - \tilde{\lambda})I = (\tilde{\lambda} - \mu_s)(L - \tilde{\lambda}I)B$$

可得 (1) 和 (2), 其中

$$B = R_{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\mu_s - \tilde{\lambda}} I. \tag{6.6.3}$$

又 $\forall \lambda, \mu \in \rho(L)$, 有

$$R_\mu(L) - R_\lambda(L) = (\lambda - \mu) R_\mu(L) R_\lambda(L),$$

所以, (3) 和 (4) 成立.

下面证明 (5). 根据式 (6.6.3) 中 B 的定义, 对于 $f \in D(L) \Rightarrow Bf \in D(L)$, 而且

$$(L - \tilde{\lambda}I)Bf = B(L - \tilde{\lambda}I)f. \tag{6.6.4}$$

若 $f \in N_{\mu_s}$, 则存在 n, 使得 $(L - \mu_s I)^n f = 0$, 再由式 (6.6.4) 可知

$$(\tilde{\lambda} - \mu_s)^n (L - \tilde{\lambda}I)^n B^n f = 0.$$

由于 $\tilde{\lambda} \in \rho(L)$, $\tilde{\lambda} - \mu_s \neq 0$, $(L - \tilde{\lambda}I)^{-1}$ 存在且有界. 所以, $B^n f = 0$, 即

$$\left(R_{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{\mu_s - \tilde{\lambda}} I \right)^n f = 0.$$

由此推出 $f \in N_s$, 从而

$$N_{\mu_s} \subseteq N_s. \tag{6.6.5}$$

反之, 若 $Bh \in D(L)$, 即 $R_{\tilde{\lambda}}h - \dfrac{1}{\mu_s - \tilde{\lambda}}h \in D(L)$, 则 $R_{\tilde{\lambda}}h \in D(L)$, 从而 $h \in D(L)$. 且 $\forall f \in N_s, B^n f = 0$, 由式 (6.6.4) 得

$$(L - \mu_s I)^n f = [(\tilde{\lambda} - \mu_s)(L - \tilde{\lambda} I)B]^n f = (\tilde{\lambda} - \mu_s)^n (L - \tilde{\lambda} I)^n B^n f = 0,$$

这说明 $f \in N_{\mu_s}$, 从而

$$N_{\mu_s} \supseteq N_s. \tag{6.6.6}$$

综合式 (6.6.5) 和式 (6.6.6) 得, $N_{\mu_s} = N_s$. □

定理 6.6.2 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的稠定闭线性算子, 若 A 的预解算子全连续, 则 A 的谱是离散的; 若 A 是自伴算子 (C-自伴算子), 上述结论的逆也成立.

证明 A 是自伴算子的情形由定理 2.5.23 和定理 6.6.1 容易得到.

A 是 C-自伴算子的情形由定理 4.4.6 和定理 6.6.1 容易得到. □

6.6.2 半有界对称算子

设 S 是定义在 Hilbert 空间 X 上的正定对称算子, 即存在常数 $c > 0$, 使得

$$(Sf, f) \geqslant c(f, f), \quad \forall f \in D(S), \tag{6.6.7}$$

由 3.2.3 小节中的讨论及半有界对称算子的扩张理论知, 任何半有界对称算子都具有 Friedrichs 自伴扩张, 并且扩张后自然保持其半有界性.

定义二次型

$$I(f, g) = (Sf, g), \quad \forall f, g \in D(S). \tag{6.6.8}$$

设 $\tilde{I}(f,g)$ 是 $I(f,g)$ 的闭扩张, 其定义域 $D(I) \subset D(\tilde{I})$, 对 $\forall f, g \in D(I)$, $\tilde{I}(f,g) = I(f,g)$. 设 $\tilde{S}$ 是上半有界算子 S 的自伴扩张, 其定义域 $D(\tilde{S}) \supset D(S)$. 显然

$$D(S) \subseteq D(\tilde{S}) \subseteq D(\tilde{I}). \tag{6.6.9}$$

用 $\tilde{S}^{\frac{1}{2}}$ 表示算子 $\tilde{S}$ 的平方根算子, 得到如下引理.

引理 6.6.3(Kato.T) 算子 $\tilde{S}$ 的平方根算子 $\tilde{S}^{\frac{1}{2}}$ 的定义域 $D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}})$ 与 $D(\tilde{I})$ 重合, 即

$$D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}) = D(\tilde{I}), \tag{6.6.10}$$

而且, $\forall f,g\in D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}})=D(\tilde{I})$,

$$\tilde{I}(f,g)=(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}f,\tilde{S}^{\frac{1}{2}}g). \tag{6.6.11}$$

证明 为了方便证明, 引入二次型

$$I_1(f,g)=(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}f,\tilde{S}^{\frac{1}{2}}g),\quad \forall f,g\in D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}),$$

即

$$D(I_1)=D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}).$$

由于 $\tilde{S}^{\frac{1}{2}}$ 是闭算子, 所以, I_1 也是一个闭的二次型, 定义

$$I_2(f,g)=(\tilde{S}f,g),\quad \forall f,g\in D(\tilde{S}),$$

即 $D(I_2)=D(\tilde{S})$. 由 $\tilde{S}^{\frac{1}{2}}$ 定义知, $D(\tilde{S})\subset D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}})$, 所以, 对 $\forall f,g\in D(\tilde{S})$,

$$I_1(f,g)=I_2(f,g).$$

下证 I_2 的闭包 $\tilde{I}_2$ 满足

$$\tilde{I}_2(f,g)=I_1(f,g),\quad \forall f,g\in D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}).$$

设 $f\in D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}})$, 存在 $\{g_n\}\subset D(\tilde{S})$, 使得 $g_n\to f(n\to\infty)$, 并且 $\tilde{S}^{\frac{1}{2}}g_n\to\tilde{S}^{\frac{1}{2}}f$. 这样的 g_n 存在, 事实上, 设 $f=\tilde{S}^{-\frac{1}{2}}h$, $\forall h\in X$ 选取一个序列 $\{h_n\}$, 使得 $\tilde{S}^{-\frac{1}{2}}h_n\to h$. 由于 $\overline{R(\tilde{S}^{-\frac{1}{2}})}=X$, 所以

$$g_n=\tilde{S}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{S}^{-\frac{1}{2}}h_n)\to f,\quad n\to\infty,$$

在此, $g_n=\tilde{S}^{-1}h_n\in D(\tilde{S})$, $\tilde{S}^{\frac{1}{2}}g_n=\tilde{S}^{-\frac{1}{2}}h_n\to h=\tilde{S}^{\frac{1}{2}}f$.

根据 g_n 的选取, 则

$$I_2(g_n-g_m,g_n-g_m)=(\tilde{S}(g_n-g_m),(g_n-g_m))=\left\|\tilde{S}^{\frac{1}{2}}g_n-\tilde{S}^{\frac{1}{2}}g_m\right\|^2\to 0.$$

所以, $f\in D(\tilde{I}_2)$, $\tilde{I}_2(f,f)=(\tilde{S}^{\frac{1}{2}}f,\tilde{S}^{\frac{1}{2}}f)=I_1(f,f)$, 而且 $\tilde{I}_2(f,g)=I_1(f,g)$, $f,g\in D(\tilde{I}_2)$. 因为 I_1 是闭的, 则 $D(I_1)=D(\tilde{I}_2)=D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}})$. 所以,

$$\tilde{I}(f,g)=I_1(f,g)=\tilde{I}_2(f,g),\quad \forall f,g\in D(\tilde{S}^{\frac{1}{2}})=\boldsymbol{D(\tilde{I})},$$

且 $D(\tilde{I}_2)=D(\tilde{I})$. 令 $\overline{D(I_2)}=D(\tilde{I})$, 则 $\tilde{I}_2(f,g)=\tilde{I}(f,g)$, $\forall f,g\in D(\tilde{I})$. □

引理 6.6.4 设 S_1 和 S_2 是两个半有界对称算子, 具有相同的定义域 $D(S)$, $D(S)$ 在 X 中是稠密的, 假设 $\forall f \in D(S)$,

$$I_1(f,f) = (S_1 f, f) \leqslant (S_2 f, f) = I_2(f,f), \tag{6.6.12}$$

则

(1) $D(\tilde{S}_2^{\frac{1}{2}}) = D(\tilde{I}_2) \subseteq D(\tilde{I}_1) = D(\tilde{S}_1^{\frac{1}{2}})$;

(2) $\forall f \in D(\tilde{S}_2^{\frac{1}{2}}) = D(\tilde{I}_2)$,

$$I_1(f,f) = (\tilde{S}_1^{\frac{1}{2}} f, \tilde{S}_1^{\frac{1}{2}} f) \leqslant (\tilde{S}_2^{\frac{1}{2}} f, \tilde{S}_2^{\frac{1}{2}} f) = \tilde{I}_2(f,f). \tag{6.6.13}$$

证明 由引理 6.6.3 便得. □

注 设 S_1 和 S_2 满足引理 6.6.3 的基本假设, 则算子 $N = \tilde{S}_1^{\frac{1}{2}} \tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}}$ 是有界算子, N 在 X 上处处有定义,

$$\begin{aligned}(Nf, Nf) &= (\tilde{S}_1^{\frac{1}{2}} \tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}} f, \tilde{S}_1^{\frac{1}{2}} \tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}} f) = \tilde{I}_1(\tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}} f, \tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}} f) \\ &\leqslant \tilde{I}_2(\tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}} f, \tilde{S}_2^{-\frac{1}{2}} f) = (f,f),\end{aligned}$$

所以 $\|N\| \leqslant 1$.

定理 6.6.5 设 L_1 与 L_2 是在 Hilbert 空间 X 内具有相同定义域 D 的两个稠定对称算子, 对某 $\lambda = \lambda_0$, $(L_1 + \mathrm{i}L_2 - \lambda_0 I)D$ 在 X 内稠密, 且满足如下两条件之一:

(1) 算子 L_1 和 L_2 在 D 上是半有界算子 (假设均为下有界), L_1, L_2 和 $L_1 + L_2$ 的自伴扩张 $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$ 和 $\overline{L_1 + L_2}$ 中至少有一个自伴算子具有 Hilbert-Schmidt 型预解算子;

(2) 对所有 $f \in D$, 不等式 $(L_1 f, f) - |(L_2 f, f)| \geqslant -\sigma^2 (f,f)$ 成立, 并且 $\overline{L}_1$ 具有 Hilbert-Schmidt 型预解算子.

则非对称算子 $L = L_1 + \mathrm{i}L_2$ 具有闭包 $\overline{L}$, $\overline{L}$ 具有一个 Hilbert-Schmidt 型预解算子, $\overline{L}$ 的特征系及其共轭生成的集合在 X 内是完备的.

证明 先证满足条件 (1) 结论成立, 不失一般性, 假设 L_1, L_2 下界为 1, 即

$$(L_1 f, f) > (f,f), \quad (L_2 f, f) > (f,f), \tag{6.6.14}$$

并设 $\overline{L_1 + L_2}$ 具有 Hilbert-Schmidt 型预解算子.

首先证 $L = L_1 + \mathrm{i}L_2$ 的闭包是 Hilbert-Schmidt 型预解算子. 设 $M = \overline{L_1 + L_2}$, $N = \overline{L}_2^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}}$, M 具有 Hilbert-Schmidt 型预解算子, M^{-1} 存在, 则 M^{-1} 是 Hilbert-Schmidt 型算子, M 是下半有界算子, N 是有界算子. $\forall f \in D(\overline{L}_2^{\frac{1}{2}})$, $N^* f = M^{-\frac{1}{2}} \overline{L}_2^{\frac{1}{2}} f$,

而 $\forall f \in D,\ Lf = (L_1 + \mathrm{i}L_2)f$, 则

$$\begin{aligned}Lf &= (\overline{L}_1 + \mathrm{i}\overline{L}_2)f = (\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + (\mathrm{i}-1)\overline{L}_2)f,\\ &= (\overline{L_1 + L_2} + (\mathrm{i}-1)\overline{L}_2)f = (M + (\mathrm{i}-1)\overline{L}_2)f\\ &= (\mathrm{i}-1)M^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}-1}I + M^{-\frac{1}{2}}\overline{L}_2^{\frac{1}{2}}\overline{L}_2^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}\right)M^{\frac{1}{2}}f\\ &= (\mathrm{i}-1)M^{\frac{1}{2}}\left(N^*N + \frac{1}{\mathrm{i}-1}I\right)M^{\frac{1}{2}}f,\end{aligned}$$

由此可以看出 M 具有有界逆, 所以, $M^{\frac{1}{2}}$ 具有有界逆. 而 N^*N 是自伴算子, $\dfrac{1}{\mathrm{i}-1} \in \rho(N^*N)$, 所以, $\left(N^*N + \dfrac{1}{\mathrm{i}-1}I\right)$ 也有有界逆. 令

$$B = (\mathrm{i}-1)^{-1}M^{\frac{1}{2}}\left(N^*N + \frac{1}{\mathrm{i}-1}I\right)^{-1}M^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.6.15}$$

则 B 是 Hilbert-Schmidt 型算子:

$$BLf = f, \quad \forall f \in D$$

$\forall f \in D$, 若 $(L - \lambda_0 I)f = h$, 则 $B(L - \lambda_0 I) = Bh$. 由定理假设 $(L - \lambda_0 E)D$ 在 X 内稠密, 由于 B 是可逆的, 故 $\{Bh\}$ 在 X 内稠密. 因而 B 是紧算子, 所以 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 不是 B 的特征值 (谱点), 从而 $(I - \lambda_0 B)^{-1}$ 存在且有界, 并且

$$f = (I - \lambda_0 B)^{-1}Bh.$$

由 $(L - \lambda_0 I)f = h$ 可知, $(L - \lambda_0 I)^{-1} = (I - \lambda_0 B)^{-1}B$.

算子 $(L - \lambda_0 I)$ 的闭包 $\overline{L - \lambda_0 I} = \overline{L} - \lambda_0 I$. 而且 $(\overline{L} - \lambda_0 I) : D \to X$,

$$(\overline{L} - \lambda_0 I)^{-1} = (I - \lambda_0 B)^{-1}B.$$

由于 B 是 Hilbert-Schmidt 型算子, $(I - \lambda_0 B)^{-1}$ 有界, 所以, $(\overline{L} - \lambda_0 I)^{-1}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子, $(\overline{L} - \lambda_0 I)$ 的谱是离散的, 即都是孤立特征值, 也即 $\overline{L}$ 的谱均是孤立特征值. 对于任意的 $\lambda \in \rho(\overline{L})$, $R_\lambda = (\overline{L} - \lambda I)^{-1}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子.

其次证明 $\overline{L}$ 的根子空间系 D_1 的完备性. 根据假设式 (6.6.14) 可知 $0 \notin \sigma(\overline{L})$. 若 $0 \in \sigma(\overline{L})$, 则存在 $f \in D(\overline{L})$, 使得 $\overline{L}f = 0$, 且存在 $\{f_n\} \in D(S)$, 使得 $f_n \to f$, $\overline{L}f_n = Lf \to 0$. 所以,

$$Lf_n = L_1 f_n + \mathrm{i}L_2 f_n, \quad (L_1 f_n, f_n) \to 0,$$

由此得 $(f_n, f_n) \to 0$, $f = 0$, 即 $\lambda = 0$ 不是特征值. 所以, $\overline{L}^{-1}$ 存在且是 Hilbert-Schmidt 型算子, $\overline{L}$ 与 $\overline{L}^{-1}$ 的根子空间相同 (重合).

只需证明 $\overline{L}^{-1}$ 的根子空间完备即可. 根据式 (6.6.15), 有

$$\overline{L}^{-1} = M^{1/2}(N^*N(\mathrm{i}-1)+I)^{-1}M^{-\frac{1}{2}},$$

设

$$K = N^*N(\mathrm{i}-1)+I, \quad K^* - K = -2\mathrm{i}N^*N,$$

则

$$\begin{aligned}
\overline{L}_I^{-1} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{L}^{-1} - \overline{L}^{-1^*}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}M^{-\frac{1}{2}}(K^{-1} - {K^*}^{-1})M^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}M^{-\frac{1}{2}}K^{-1}(K^* - K){K^*}^{-1}M^{-\frac{1}{2}} = -M^{-\frac{1}{2}}K^{-1}N^*N{K^*}^{-1}M^{-\frac{1}{2}} \\
&= -(M^{-\frac{1}{2}}K^{-1}N^*)(M^{-\frac{1}{2}}K^{-1}N^*)^* \leqslant 0. \\
\overline{L}_R^{-1} &= \frac{1}{2}(\overline{L}^{-1} + \overline{L}^{-1^*}) = \frac{1}{2}M^{-\frac{1}{2}}(K^{-1} + {K^*}^{-1})M^{-\frac{1}{2}} \\
&= M^{-\frac{1}{2}}K^{-1}(I - N^*N){K^*}^{-1}M^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

又由 $N = \overline{L}_2^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}$, $M = \overline{L}_1 + \overline{L}_2$, 以及式 (6.6.14) 得, $\forall f \in D(S)$,

$$(\overline{L}_2 f, f) < (Mf, f),$$

$$\begin{aligned}
(N^*Nf, f) &= (Nf, Nf) = (\overline{L}_2^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}f, \overline{L}_2^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}f) = (\overline{L}_2 M^{-\frac{1}{2}}f, M^{-\frac{1}{2}}f) \\
&\leqslant (MM^{-\frac{1}{2}}f, M^{-\frac{1}{2}}f) = (f, f).
\end{aligned}$$

所以, $(I - N^*N) \geqslant 0$, 从而 $\overline{L}_R^{-1} = M^{-\frac{1}{2}}K^{-1}(I - N^*N){K^*}^{-1}M^{-\frac{1}{2}} \geqslant 0$.

由于 $\overline{L}^{-1}f = 0$ 只有零解, 所以, $\overline{L}^{-1}$ 的所有特征向量及其共轭系在 Hilbert 空间 X 内完备, 即 $\overline{L}$ 的所有特征向量及其共轭所生成的集合在 Hilbert 空间 X 内完备.

然后证明: 若 $\overline{L}_1^{-1}$ 或 $\overline{L}_2^{-1}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 则 $(\overline{L_1 + L_2})^{-1}$ 也是 Hilbert-Schmidt 型算子. 不妨设 $\overline{L}_1^{-1}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子, $M = \overline{L_1 + L_2}$, 则 $N = \tilde{L}_1^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}$ 是有界算子, 并且在 $D(\overline{L}_1^{\frac{1}{2}})$ 上 $\overline{L}_1^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}} = NN^*$, $\forall h \in X$,

$$M^{-1}h = \overline{L}_1^{-\frac{1}{2}}NN^*\overline{L}_1^{-\frac{1}{2}}h,$$

故 M^{-1} 是 Hilbert-Schmidt 型算子. 同理 $\overline{L}_2^{-1}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子, 可以推出 $(\overline{L_1 + L_2})^{-1}$ 是 Hilbert-Schmidt 型算子.

最后证明条件 (2) 成立结论也成立.

由若 L_1, L_2 满足条件 $(L_1 f, f) - |(L_2 f, f)| \geqslant -\sigma^2(f, f)$. $L = L_1 + \mathrm{i}L_2$, 令

$$L^{(1)} = (1+\mathrm{i})(L_1 + \mathrm{i}L_2) = (L_1 - L_2) + \mathrm{i}(L_1 + L_2) = L_1^{(1)} + \mathrm{i}L_2^{(1)},$$

则 $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}$ 在 D 上均为下半有界的对称算子, 而且 $L_1^{(1)} + L_2^{(1)} = 2L_1$. 由于 $\overline{L}_1^{-1}$ 具有 Hilbert-Schmidt 型预解算子, 所以 $\overline{L_1^{(1)} + L_2^{(1)}}$ 具有 Hilbert-Schmidt 型预解算子. 由条件 (1), 关于 $L_1^{(1)}$ 结论正确, 即 $\overline{L}$ 的所有特征向量及其共轭在 Hilbert 空间 X 内完备. □

6.6.3 微分算子中的应用

定理 6.6.6 若在式 (5.5.1) 中系数 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 满足 $p_k(x) = a_k(x) + \mathrm{i}b_k(x)$, 其中 $a_k(x)$, $b_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 是定义在区间 $[1, \infty)$ 上的实函数, 而且

(1) $a_k(x)$, $b_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 不恒等于零, $a_k(x)$, $b_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 是 x 的实数次幂的和,

$$a_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项}, \quad c_k > 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$
$$b_k(x) = d_k x^{m(k)} + \text{低阶项}, \quad d_k > 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n;$$

(2) 当 $k \neq s$ 时, $n(k) - 2k \neq m(s) - 2s$;

(3) 记 $k^* = \max\{n(k) - 2k\}$, $s^* = \max\{m(s) - 2s\}$, 存在且仅存在一个 k 和一个 s 使得

$$k^* = n(k) - 2k, \quad s^* = m(s) - 2s; \tag{6.6.16}$$

(4) $\max\{m(0), n(0)\} > 0$, $\max\{m(1), n(1)\} > 2$,

则算子 T_0 是极限点型的, 而且式 (5.5.1) 生成的任何 J-自伴扩张算子 T 的谱是离散的.

证明　算子 T_0 是极限点型的证明见文献 [101]. 下面证明式 (5.5.1) 的任何 J-自伴扩张算子 T 的谱是离散的. 对式 (5.5.1) 进行分解,

$$l_1 y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (a_k(x) y^{(k)})^{(k)}, \quad x \geqslant 1,$$
$$l_2 y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (b_k(x) y^{(k)})^{(k)}, \quad x \geqslant 1,$$

设 T_{10}, T_{20}, T_0 是分别由微分算式 l_1, l_2, l 生成的最小算子, 即

$$T_{10} f = l_1(f), \quad \forall f \in D(T_{10}) = C_0^\infty[1, \infty),$$
$$T_{20} f = l_2(f), \quad \forall f \in D(T_{20}) = C_0^\infty[1, \infty),$$
$$T_0 f = l(f), \quad \forall f \in D(T_0) = C_0^\infty[1, \infty). \tag{6.6.17}$$

下面只需证明 T_{10}, T_{20}, T_0 满足定理 6.6.5 的条件 (1) 即可.

根据定理的条件可知 T_{10}, T_{20}, T_0 是稠定的对称算子. 又根据条件 (1) 可得到, 存在常数 $\gamma_i > -\infty(i=1,2)$, 使得

$$(T_{10}y, y) > \gamma_1\|y\|^2, \quad y \in D(T_{10}),$$
$$(T_{20}y, y) > \gamma_2\|y\|^2, \quad y \in D(T_{20}),$$

从而 T_{10}, T_{20} 是下半有界的, 满足引理 5.5.14 的条件 (1) 和条件 (2).

由于 T_{10}, T_{20} 是下半有界的, 所以 T_{10}, T_{20} 的正则点集非空, 即 $\Pi(T_{10}) \neq \varnothing$, $\Pi(T_{20}) \neq \varnothing$. 又因为 $T_0 = T_{10} + \mathrm{i}T_{20}$, 所以 $\Pi(T_0) \neq \varnothing$, $\Pi(T_1) \neq \varnothing$, 这里 T_1 是 T_0 的 Friedrichs 扩张. 若 T 是 T_0 的 J-自伴扩张算子, 则由定理 6.6.5 可知, $\Pi(T) = \rho(T)$, 所以, $\rho(T) \neq \varnothing$. $\forall \lambda \in \rho(T)$, 集合 $R(T-\lambda I)$ 在 $L^2[1,\infty)$ 内稠密, 所以, 定理 6.6.5 的条件 (1) 也满足.

下面考虑算子 $T_{10}+T_{20}$, $D(T_{10}+T_{20}) = D(T_{10}) = D(T_{20})$. 对于任意的 $y \in D(T_{10}+T_{20})$, 有

$$(T_{10}+T_{20})y = l_1 y + l_2 y = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k[(a_k(x)+b_k(x))y^{(k)}]^{(k)},$$

由条件 (1) 可知, 存在 $X > 1$, 使得当 $x \in [X, \infty)$ 时,

$$a_k(x) + b_k(x) \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{6.6.18}$$

用 $(T_{10}+T_{20})_{[1,X]}, (T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}$ 分别表示 (l_1+l_2) 在对应区间 $[1, X]$ 和 $[X, \infty)$ 上的最小算子; 用 $T_1+T_2, (T_1+T_2)_{[1,X]}, (T_1+T_2)_{[X,\infty)}$ 分别表示 $T_{10}+T_{20}$, $(T_{10}+T_{20})_{[1,X]}$ 和 $(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}$ 的 Friedrichs 自伴扩张, 则

$$(T_{10}+T_{20})_{[1,X]}y = (l_1+l_2)y, \quad y \in D((T_{10}+T_{20})_{[1,X]}) = C_0^\infty[1, X],$$
$$(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}y = (l_1+l_2)y, \quad y \in D((T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}) = C_0^\infty[X, \infty),$$
$$T_1+T_2 = (T_1+T_2)_{[1,X]} \oplus (T_1+T_2)_{[X,\infty)}.$$

由上面的分解及定理的条件可知, $(T_{10}+T_{20})_{[1,X]}$ 是一个正则算子, 从而 $\sigma_e((T_{10}+T_{20})_{[1,X]}) = \varnothing$, 所以,

$$\sigma_e(T_{10}+T_{20}) = \sigma_e((T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}),$$
$$\sigma_e(T_1+T_2) = \sigma_e((T_1+T_2)_{[X,\infty)}).$$

考虑算子 $(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}$. 对于任意的 $y \in D((T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)})$,

$$(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}y = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k(x)+b_k(x))y^{(k)}]^{(k)}, \tag{6.6.19}$$

当 X 取的充分大时, 由式 (6.6.18) 及定理的条件 (4), 取 $s=1$ 及分划 $Z=\{x_1=X, x_2=X+1,\cdots,x_{n+1}=X+n,\cdots\}$, 则算子 $(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}$ 的系数 $a_k(x)+b_k(x)$ 满足定理 6.6.5 的条件, 所以 $\sigma_e(T_{10}+T_{20})=\sigma_e((T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)})=\varnothing$, 即 $\sigma_e(T_1+T_2)=\sigma_e((T_1+T_2)_{[X,\infty)})=\varnothing$. 这就说明了算子 T_1+T_2 的谱是离散的, 又因为 T_1+T_2 是自伴算子, 故 T_1+T_2 的预解算子是全连续的, 即定理 6.6.5 的条件 (1) 满足.

综上所述, T_{10},T_{20},T_0 满足定理 6.6.5 的条件. 所以, T_0 闭扩张 $\overline{T}_0$ 的预解算子是全连续的, 即 $\overline{T}_0$ 的谱是离散的, $\sigma_e(\overline{T}_0)=\varnothing$, 而且 T_0 的任意 J-自伴扩张算子 T 的本质谱是空集, $\sigma_e(T)=\varnothing$, 即 T 的谱是离散的. □

关于 $2n$ 阶一项自伴微分算子谱的离散性, 早在 20 世纪 50 年代 Glazman[59] 就进行了研究, 得到了一项自伴微分算子的谱是离散谱的充分条件, 并且将其谱是离散谱的必要条件在其文章中作为公开问题. 20 年后 Lewis[89] 解决了这一公开问题.

用 L 表示微分算式

$$ly=(-1)^n(r(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0 \tag{6.6.20}$$

的任意自伴扩张, 其中 $r(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数, 并且 $r(x)>0(\forall x\geqslant 0)$.

引理 6.6.7[89]　一项自伴微分算子 L 的谱是离散的, 而且下半有界的充分必要条件是

$$\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^\infty r^{-1}(t)\mathrm{d}t=0.$$

下面主要研究在式 (6.6.20) 中, 当系数是复值函数时所生成微分算子的谱是离散的充分条件, 设

$$ly=(-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0, \tag{6.6.21}$$

其中, $p(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的复函数, 并且 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $\forall x\geqslant 0$, $p_1(x),p_2(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数. 也就是研究式 (6.6.21) 所生成微分算子的谱是离散的充分条件.

定理 6.6.8　如果式 (6.6.21) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$ 满足

(1) $\forall x\in[0,\infty)$, $p_1(x)>0$, $p_2(x)>0$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^\infty\frac{1}{p_1(t)+p_2(t)}\mathrm{d}t=0$,

则算子 T_0 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

证明　对式 (6.6.21) 进行分解,

$$l_1y=(-1)^n(p_1(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0,$$

$$l_2y=(-1)^n(p_2(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0,$$

设 T_{10}, T_{20}, T_0 分别是由微分算式 l_1, l_2, l 生成的最小算子, 即

$$T_{10}f = l_1(f), \quad \forall f \in D(T_{10}) = C_0^{\infty}[0,\infty), \tag{6.6.22}$$

$$T_{20}f = l_2(f), \quad \forall f \in D(T_{20}) = C_0^{\infty}[0,\infty), \tag{6.6.23}$$

$$T_0 f = l(f), \quad \forall f \in D(T_0) = C_0^{\infty}[0,\infty). \tag{6.6.24}$$

下面只需证明 T_{10}, T_{20}, T_0 满足定理 6.6.5 的条件.

由式 (6.6.22), 式 (6.6.23) 和条件 (1) 可知, T_{10}, T_{20} 是对称的且是稠密的, 而且 $D(T_{10}) = D(T_{20})$, 又 $\forall y \in D(T_{10}) = D(T_{20})$, 有

$$\Re(T_0 y, y) = (T_{10}y, y) = \int_0^{\infty} (-1)^{(n)}(p_1 y^{(n)})^{(n)} \bar{y} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} p_1 |y^{(n)}|^2 \mathrm{d}x \geqslant 0, \tag{6.6.25}$$

$$\Im(T_0 y, y) = (T_{20}y, y) = \int_0^{\infty} (-1)^{(n)}(p_2 y^{(n)})^{(n)} \bar{y} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} p_2 |y^{(n)}|^2 \mathrm{d}x \geqslant 0, \tag{6.6.26}$$

所以, T_{10}, T_{20} 也是下半有界的. 说明了 T_{10}, T_{20} 满足定理 6.6.5 的条件.

由式 (6.6.22), 式 (6.6.23), 式 (6.6.25) 及式 (6.6.26) 可知 $T_0 = T_{10} + \mathrm{i}T_{20}$, 且 T_0 的正则集非空. 从而对任意的 $\lambda \in \rho(T_0)$, 集合 $R(T_{10} + \mathrm{i}T_{20} - \lambda I)$ 和 $R(T_{10} - \mathrm{i}T_{20} - \lambda I)$ 在 Hilbert 空间 $L^2[0,\infty)$ 内是稠密的. 说明了 T_{10}, T_{20} 满足定理 6.6.5 的条件.

令

$$Ly = (T_{10} + T_{20})y = (l_1 + l_2)y = (-1)^n((p_1 + p_2)y^{(n)})^{(n)}, \quad \forall y \in D(T_{10}) = D(T_{20}),$$

则 $L = T_{10} + T_{20}$ 是对称且稠定的下半有界算子. 利用条件 (2) 及引理 6.6.7 得, $L = T_{10} + T_{20}$ 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的. 根据定理 6.6.5 得 $L = T_{10} + T_{20}$ 的任何 J-自伴扩张的预解算子是全连续的. 说明了 T_{10}, T_{20} 满足定理 6.6.5 条件的条件.

由此可见, T_{10}, T_{20}, T_0 满足定理 6.6.5 的所有条件, 而且 T_0 的正则集非空, 利用定理 6.6.5 可得: 对于 T_0 的任意 J-自伴扩张 T, 当 $\lambda \in \rho(T)$ 时, $(T - \lambda I)^{-1}$ 是全连续算子. 再根据定理 4.4.6 便得证结论. □

推论 6.6.9 如果式 (6.6.21) 的系数 $p(x) = p_1(x) + \mathrm{i}p_2(x)$ 满足

(1) $\forall x \in [0,\infty)$, $p_1(x) > 0$, $p_2(x) > 0$,

(2)

$$\lim_{x\to\infty} x^{2n-1} \int_x^{\infty} \frac{1}{p_1(t)} \mathrm{d}t = 0,$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty} x^{2n-1} \int_x^{\infty} \frac{1}{p_2(t)} \mathrm{d}t = 0,$$

则算子 T_0 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

定理 6.6.10 如果式 (6.6.21) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$ 满足:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}p_1(x)>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}p_2(x)>0$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2n-1}\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{1}{p_1(t)+p_2(t)}\mathrm{d}t=0$,

则算子 T_0 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

证明 利用算子直和分解的办法[59, 122], 根据条件 (1), 存在充分大的 $N>0$, 使得当 $x\geqslant N$ 时, $p_1(x)>0$, 且 $p_2(x)>0$, 这样 $T_0=T_{0[0,N]}\oplus T_{0[N,\infty)}$. 而 $T_{0[0,N]}$ 是一个正则算子, 所以它的谱是离散的. 类似定理 6.6.8 的方法可以得到 $T_{0[N,\infty)}$ 的谱也是离散的. 从而得到算子 T_0 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的. □

根据定理 6.6.8 的证明过程可类似得到下面结论.

定理 6.6.11 如果式 (6.6.21) 的系数 $p(x)=ax^{\alpha}+\mathrm{i}bx^{\beta}$, 其中 a,b 是实数, 并且

$$a,b>0,\quad \max\{\alpha,\beta\}>2n, \tag{6.6.27}$$

则算子 T_0 的任何 J-自伴扩张的谱是离散的.

定理 6.6.8 和定理 6.6.10 的必要性仍然是一个公开问题.

定理 6.6.12 如果微分算式

$$ly=-(p(x)y')',\quad x\geqslant 0 \tag{6.6.28}$$

的系数满足: 存在 $M_1,M_2>-\infty$, 使得 $\forall x\in[0,\infty)$, $p_1(x)>M_1$ 和 $p_2(x)>M_2$ 成立, 且极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{p''(x)}$ 存在, 则 T_0 的所有 J-自伴扩张的谱是离散的充分必要条件是

$$\lim_{x\to\infty}x\int_x^{\infty}\frac{1}{p_1(t)+p_2(t)}\mathrm{d}t=0 \tag{6.6.29}$$

成立, 其中 T_0 是由式 (6.6.28) 所生成的最小算子.

证明 充分性由定理 6.6.10 立得. 下面证明必要性.

不失一般性, 假设 $M_1,M_2\geqslant 0$. 若式 (6.6.29) 不成立, 由于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{p''(x)}$ 存在, 则存在非零常数 $c>0$ (c 可以是无穷大), 使得

$$\lim_{x\to\infty}x\int_x^{\infty}\frac{1}{p_1(t)+p_2(t)}\mathrm{d}t=c.$$

所以,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{p_1(x)+p_2(x)}=c,\ \text{且}\ p_1(x)+p_2(x)=\frac{1}{c}x^2+\ \text{比}\ x^2\ \text{低阶的项}, \tag{6.6.30}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{p_1'(x)+p_2'(x)}=c,\ \text{且}\ p_1'(x)+p_2'(x)=\frac{2}{c}x+\ \text{比}\ x\ \text{低阶的项}, \tag{6.6.31}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{p_1''(x)+p_2''(x)}=c,\ \text{且}\ p_1''(x)+p_2''(x)=\frac{2}{c}+o(1). \tag{6.6.32}$$

设 T 是 T_0 的任何一个 J-自伴扩张, 则算子 T^*T 是自伴算子, 对于 $y\in D(T^*T)$,

$$T^*Ty=(q(x)y'')''+(r(x)y')'+\frac{1}{2}[(s(x)y'')'+(s(x)y')''],$$

其中,

$$\begin{aligned}
&q(x)=\overline{p}(x)p(x)=p_1^2(x)+p_2^2(x),\\
&r(x)=\frac{1}{2}(\overline{p}(x)p''(x)+\overline{p}''(x)p(x))=p_1(x)p_1''(x)+p_2(x)p_2''(x),\\
&s(x)=\overline{p}(x)p'(x)-\overline{p}'(x)p(x)=\mathrm{i}(p_2'(x)p_1(x)-p_1'(x)p_2(x)).
\end{aligned}$$

取 N 为充分大的数, 令 $T^*T|_0$ 和 $T^*T|_N$ 分别表示算子 T^*T 在空间 $L^2(0,N)$ 和空间 $L^2(N,\infty)$ 上的限制, 则 $T^*T=T^*T|_0\oplus T^*T|_N$, 而且 $\sigma_e(T^*T)=\sigma_e(T^*T|_N)$.

设 $y\in C_0^\infty(N,\infty)\subset D(T^*T|_N)$, 则

$$\begin{aligned}
0\leqslant(T^*T|_Ny,y)&=\int_N^\infty\left\{(qy'')''+(ry')'+\frac{1}{2}[(sy'')'+(sy')'']\right\}\overline{y}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_N^\infty\left[q(x)|y''|^2-r(x)|y'|^2-\frac{1}{2}s(x)y''\overline{y}'+\frac{1}{2}s(x)y'\overline{y}''\right]\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_N^\infty(p_1^2+p_2^2)|y''|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty|p_1''p_1+p_2p_2''|\ |y'|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty|s(x)|\ |y''|\ |y'|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由式 (6.6.30)~式 (6.6.32) 得

$$\begin{aligned}
(T^*T|_Ny,y)\leqslant&\int_N^\infty\left|\frac{1}{c^2}x^4+o(x^4)\right|\ |y''|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty\left|\frac{2}{c^2}x^2+o(x^2)\right|\ |y'|^2\mathrm{d}x\\
&+\int_N^\infty\left|\frac{2}{c^2}x^3+o(x^3)\right|\ |y''|\ |y'|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

取 N 充分大, 存在实数 $C_i>0\ \ (i=1,2,3)$, 使得

$$\begin{aligned}
(T^*T|_Ny,y)&\leqslant\int_N^\infty C_1x^4|y''|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty C_2x^2|y'|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty C_3x^3|y''|\ |y'|\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_N^\infty C_1x^4|y''|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty C_2x^2|y'|^2\mathrm{d}x+\frac{C_3}{2}\int_N^\infty(x^4|y''|^2+x^2|y'|^2)\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_N^\infty\left(C_1+\frac{C_3}{2}\right)x^4|y''|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty\left(C_2+\frac{C_3}{2}\right)x^2|y'|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{6.6.33}$$

令

$$a[y,z]=\int_N^{\infty}\left(C_1+\frac{C_3}{2}\right)x^4y''\overline{z}''\mathrm{d}x+\int_N^{\infty}\left(C_2+\frac{C_3}{2}\right)x^2y'\overline{z}'\mathrm{d}x,$$

则 $a[y,z]$ 是一个闭的、下半有界的双线性型. 由定理 3.5.5 得, 存在一个自伴算子 A, 使得 $a[y,z]=(Ay,z)$. 再由定理 5.5.5 算子 A 的本质谱包含在区间 $[\Lambda,\infty)$, 这里

$$\Lambda=\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{2}A_k\prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2+\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right], \tag{6.6.34}$$

其中, $A_0=0$, $A_1=C_2+\dfrac{C_3}{2}$, $A_2=C_1+\dfrac{C_3}{2}$

因为算子 T_0 的所有 J-自伴扩张的谱是离散的, 所以, T 的谱是离散的, 因而算子 T^*T 的谱是离散的. 从而 $\sigma_e(T^*T)\cap(-\infty,\infty)=\varnothing$, 也即 $\sigma_e(T^*T|_N)\cap(-\infty,\infty)=\varnothing$. 根据式 (6.6.33) 和定理 3.5.6 就有 $\sigma_e(A)\cap(-\infty,\infty)=\varnothing$. 但 $\sigma_e(A)=[\Lambda,\infty)$, 矛盾, 所以式 (6.6.29) 成立. □

例 6.6.13 在 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,\infty)$ 上微分算子

$$Ly=-y''+(q(x)+\mathrm{i}r(x))y, \tag{6.6.35}$$

$D=\left\{f\in L^2(-\infty,\infty)\mid \mathrm{supp}f(x)\subset[a,b]\subset(-\infty,\infty),\ f'(x)\in AC(-\infty,\infty)\right\}$, 其中, $q(x),r(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的实函数.

设 $q(x)$ 是下有界的, $r(x)$ 是半有界的, 而且对 $\forall\alpha>\dfrac{2}{3}$, 有

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{q(x)+|r(x)|}{|x|^{\alpha}}\geqslant c>0, \tag{6.6.36}$$

则算子 L 的闭扩张 $\overline{L}$ 具有离散谱, 它的特征向量及其共轭在 $L^2(-\infty,\infty)$ 内完备.

例 6.6.14 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上,

$$Ly=-y''+x^{\alpha}y\ (\alpha>0),\quad D(L)=\{y\in D\mid y(0)=0\}, \tag{6.6.37}$$

L 是自伴算子, 并且其谱是离散的.

设 L 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$, 对应的特征函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$, 特征函数可解析扩充到右半平面的函数 $\varphi_1(z),\varphi_2(z),\cdots,\varphi_n(z),\cdots$,

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n}{\mathrm{d}z^2}+z^{\alpha}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n\quad(\Re z>0), \tag{6.6.38}$$

固定在某直线 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}(0\leqslant\rho<\infty)$ 上,

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n}{\mathrm{d}\rho^2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(2+\alpha)}\rho^{\alpha}\varphi_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\sigma}\lambda_n\varphi_n, \tag{6.6.39}$$

设 $|\sigma| \leqslant \dfrac{\pi}{2(2+\alpha)}$, 则 $\varphi_1(\rho e^{i\sigma}), \varphi_2(\rho e^{i\sigma}), \cdots, \varphi_n(\rho e^{i\sigma}), \cdots$ 是非自伴算子

$$Ly = -y''_{\rho\rho} + (\cos\sigma(2+\alpha) + i\sin\sigma(2+\alpha))\rho^\alpha y,$$
$$D(L) = \{y \in D \mid y(0) = 0\}$$

的特征向量. 若 $\alpha > \dfrac{2}{3}$, 上述特征系在 $L^2(0,\infty)$ 内完备. □

6.7 耗散的 Sturm-Liouville 算子及其根空间的完备性

常微分算子理论最早建立在 Sturm-Liouville 问题的研究基础上, 而 Sturm-Liouville 问题来源于 Sturm 和 Liouville 的经典文章[106, 151, 152]. 1910 年, Weyl 的点圆分类[204], 开始了微分算子的理论研究. 在微分算子理论研究中的另一重要里程碑是 Glazman-Krein-Naimark (GKN) 定理[33, 124], 把具有自伴边条件的线性对称微分方程边值问题与自伴算子建立了一一对应, 研究这样类型的边值问题转化为研究自伴微分算子的谱理论. 与此同时, 人们也碰到了非自伴微分算子问题, 如 6.6 节提到的 J-对称微分算式生成的 J-对称微分算子和 J-自伴微分算子, 以及对称微分算式在非自伴边条件下产生的算子. 本节应用 6.4 节的结论, 讨论非自伴边条件下的 Sturm-Liouville 问题.

6.7.1 耗散的 Sturm-Liouville 算子

设 $m, n \in \mathbb{N}$, 用 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ 表示 $m \times n$ 复矩阵的集合, $M^*_{m,n}(\mathbb{C})$ 表示 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ 中具有 $\min\{m,n\}$ 秩的矩阵集合. $GL(2,\mathbb{C})$ 表示所有 2×2 可逆矩阵. 在本节中, 将假设下面定义的微分算式在奇异端点是 Weyl 极限圆型的.

$$l(y) = -(py')' + qy = \lambda wy, \quad x \in (a,b), \tag{6.7.1}$$

即方程 (6.7.1) 的所有解都属于 $L^2_w((a,b),\mathbb{C})$, 其中, $p^{-1}(x)$, $q(x) \in L_{\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{C})$, 权函数 $w > 0$ $(x \in (a,b))$. 令

$$D_M = \{f \in L^2_w((a,b),\mathbb{C}) \mid f, pf' \in AC_{\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{C}),\ l(y) \in L^2_w((a,b),\mathbb{C})\},$$

L_M 表示以 D_M 为定义域由 $l(y)$ 生成的算子, 其中 $AC_{\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{C})$ 表示在 (a,b) 的每个子区间 $[c,d] \subset (a,b)$ 上绝对连续的复值函数.

对于 $y, z \in D_M$, Lagrange 双线性型

$$[y,z](x) = y(x)\overline{(pz')(x)} - (py')(x)\overline{z(x)}$$

在端点 a 和 b 的极限都存在, 所以, $[y,z](x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 若 D_M 中的 f 和 g 满足

$$[f,g](a) = [f,g](b) = 1, \tag{6.7.2}$$

则称 f, g 形成一个边条件基. 如果对固定点 $c \in (a,b)$, 选取边条件基 $f(\cdot,\lambda)$ 和边条件基 $g(\cdot,\lambda)$ 为方程 (6.7.1) 满足下面初始条件

$$f(c,\lambda)=1,\quad (pf)'(c,\lambda)=0,\quad g(c,\lambda)=0,\quad (pg)'(c,\lambda)=1 \tag{6.7.3}$$

的解, 则在 $[a,b]$ 上, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, $[f(\cdot,\lambda),g(\cdot,\lambda)]=1$.

引理 6.7.1 若 h 和 k 是 D_M 中的实值函数, 则对 D_M 中的任意 y 和 z,

$$[y,z]\,[h,k]=[y,h]\,\overline{[z,k]}-\overline{[z,h]}\,[y,k],\quad x\in[a,b]. \tag{6.7.4}$$

证明 直接计算便得结论. □

下面研究由微分算式 (6.7.1) 在以下形式的边条件下所生成的 Sturm-Liouville 微分算子 L,

$$\begin{cases} a_{11}[y,f](a)+a_{12}[y,g](a)+b_{11}[y,f](b)+b_{12}[y,g](b)=0,\\ a_{21}[y,f](a)+a_{22}[y,g](a)+b_{21}[y,f](b)+b_{22}[y,g](b)=0, \end{cases} \tag{6.7.5}$$

其中, 边条件 (6.7.5) 的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{6.7.6}$$

属于 $M^*_{2,4}(\mathbb{C})$, 而且秩等于 2.

定理 6.7.2 设 L 是由微分算式 (6.7.1) 在边条件 (6.7.5) 下所生成的 Sturm-Liouville 微分算子, 则 L 是耗散算子的充分必要条件是系数矩阵 (6.7.6) 等价于 (左乘 $GL(2,\mathbb{C})$ 矩阵意义下) 下述四种情形之一:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & b_{12}\\ 0 & a_{22} & -1 & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.7.7}$$

其中, a_{12}, a_{22}, b_{12} 和 b_{22} 满足

$$\Im(a_{12}+b_{22})\geqslant 0,\quad 4\Im a_{12}\Im b_{22}\geqslant |a_{22}-\overline{b_{12}}|^2; \tag{6.7.8}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & b_{11} & 0\\ 0 & a_{22} & b_{21} & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.7.9}$$

其中, a_{12}, a_{22}, b_{11} 和 b_{21} 满足

$$\Im(a_{12}-b_{21})\geqslant 0,\quad -4\Im a_{12}\Im b_{21}\geqslant |a_{22}+\overline{b_{11}}|^2; \tag{6.7.10}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 & b_{12} \\ a_{21} & 0 & -1 & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.7.11}$$

其中, a_{11}, a_{21}, b_{12} 和 b_{22} 满足

$$\Im(a_{11}-b_{22}) \leqslant 0, \quad -4\Im a_{11}\Im b_{22} \geqslant |a_{21}+\overline{b_{12}}|^2; \tag{6.7.12}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & b_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 & b_{21} & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.7.13}$$

其中, a_{11}, a_{21}, b_{11} 和 b_{21} 满足

$$\Im(a_{11}-b_{21}) \leqslant 0, \quad 4\Im a_{11}\Im b_{21} \geqslant |a_{21}-\overline{b_{11}}|^2. \tag{6.7.14}$$

证明 设 $y \in D(L)$, 根据 Green 公式得

$$2\mathrm{i}\Im(Ly,y) = (Ly,y)-(y,Ly) = [y,y](b)-[y,y](a). \tag{6.7.15}$$

应用式 (6.7.2) 和式 (6.7.4) 得到

$$\begin{aligned} 2\mathrm{i}\Im(Ly,y) = & [y,f](b)\overline{[y,g](b)} - \overline{[y,f](b)}[y,g](b) \\ & -[y,f](a)\overline{[y,g](a)} + \overline{[y,f](a)}[y,g](a). \end{aligned}$$

若边条件 (6.7.5) 的系数矩阵等价于矩阵 (6.7.7), 则

$$\begin{aligned} &[y,f](a) = -a_{12}[y,g](a) - b_{12}[y,g](b), \\ &[y,f](b) = a_{22}[y,g](a) + b_{22}[y,g](b), \end{aligned} \tag{6.7.16}$$

所以,

$$2\Im(Ly,y) = (\overline{[y,g](a)}, \overline{[y,g](b)}) \begin{pmatrix} r & c \\ \bar{c} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [y,g](a) \\ [y,g](b) \end{pmatrix}. \tag{6.7.17}$$

其中,

$$r = 2\Im a_{12}, \quad c = \mathrm{i}(\overline{a_{22}} - b_{12}), \quad s = 2\Im b_{22}. \tag{6.7.18}$$

方程式 (6.7.17) 中的 2×2 矩阵是 Hermite 矩阵, 其特征值是

$$\frac{r+s \pm \sqrt{(r+s)^2+4|c|^2}}{2}. \tag{6.7.19}$$

两个特征值非负的充分必要条件是

$$r + s \geqslant 0, \quad rs \geqslant |c|^2. \tag{6.7.20}$$

即当且仅当式 (6.7.8) 成立. 根据著名的 Naimark 补缀引理(Naimark's Patching Lemma)(文献 [124] 第 V 章 §17.3 引理 2) 知 $[y,g](a)$ 和 $[y,g](b)$ 可以取到任意值[7, 124], 所以, 对任意 $y \in D(L)$, $\Im(Ly,y) \geqslant 0$ 当且仅当式 (6.7.8) 成立.

同样可以证明, 边条件 (6.7.5) 的系数矩阵 (6.7.6) 等价于矩阵 (6.7.9), 矩阵 (6.7.11) 和矩阵 (6.7.13) 情形, 对任意 $y \in D(L)$, $\Im(Ly,y) \geqslant 0$ 当且仅当式 (6.7.10), 式 (6.7.12) 和式 (6.7.14) 分别成立.

当边条件 (6.7.5) 的系数矩阵是退化的, 即系数矩阵 (6.7.6) 的秩小于 2 时, 算子 L 不是耗散算子. 所以, 非退化的系数矩 (6.7.6) 等价于矩阵 (6.7.7), 矩阵 (6.7.9), 矩阵 (6.7.11) 和矩阵 (6.7.13) 之一. □

注 1　若边条件 (6.7.5) 的系数矩阵 (6.7.6) 等价于 $(I \mid B)$, 其中, $B \in M_{2,2}(\mathbb{C})$, 则 L 是耗散算子当且仅当

$$\Im(b_{11}\overline{b_{21}} + b_{12}\overline{b_{22}}) \leqslant 0, \quad 4\Im(b_{11}\overline{b_{21}})\Im(b_{12}\overline{b_{22}}) \geqslant |1 - b_{11}\overline{b_{22}} + \overline{b_{12}}b_{21}|^2;$$

若边条件 (6.7.5) 的系数矩阵 (6.7.6) 等价于 $(A \mid -I)$, 其中 $A \in M_{2,2}(\mathbb{C})$, 则 L 是耗散算子当且仅当

$$\Im(a_{11}\overline{a_{21}} + a_{12}\overline{a_{22}}) \geqslant 0, \quad 4\Im(a_{11}\overline{a_{21}})\Im(a_{12}\overline{a_{22}}) \geqslant |a_{11}\overline{a_{22}} + \overline{a_{12}}a_{21} - 1|^2.$$

推论 6.7.3　若边条件 (6.7.5) 的系数矩阵 (6.7.6) 等价表示为如下形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.7.21}$$

则算子 L 是耗散算子当且仅当 $\Im a_{12} \geqslant 0$ 和 $\Im b_{22} \geqslant 0$.

证明　根据定理 6.7.2, 在此情形下, L 是耗散算子当且仅当

$$\Im(a_{12} + b_{22}) \geqslant 0, \quad \Im a_{12}\Im b_{22} \geqslant 0, \tag{6.7.22}$$

这就等价于 $\Im a_{12} \geqslant 0$ 和 $\Im b_{22} \geqslant 0$. □

注 2　若边条件 (6.7.5) 的系数矩阵 (6.7.6) 等价表示为形式 (6.7.7), 则边条件 (6.7.5) 是自伴边条件当且仅当

$$\Im a_{12} = \Im b_{22} = a_{22} - \overline{b_{12}} = 0.$$

关于矩阵 (6.7.9), 矩阵 (6.7.11) 和矩阵 (6.7.13) 也有类似的结论. 所以, 一个耗散边条件不是自伴边条件.

注 3 若微分算式 (6.7.1) 是正则的, 即 $\frac{1}{p}, q$ 和 w 在 (a,b) 上可积, 则由 Naimark 补缀引理, 存在实值函数 $f, g \in D_M$, 使得

$$f(a) = f(b) = 0, \quad (pf')(a) = (pf')(b) = 1,$$

$$g(a) = g(b) = -1, \quad (pg')(a) = (pg')(b) = 0,$$

即 f, g 形成了一个边条件基. 所以, 边条件 (6.7.5) 具有如下形式:

$$\begin{cases} a_{11}y(a) + a_{12}(py')(a) + b_{11}y(b) + b_{12}(py')(b) = 0, \\ a_{21}y(a) + a_{22}(py')(a) + b_{21}y(b) + b_{22}(py')(b) = 0. \end{cases}$$

故在正则情形下, 定理 6.7.2, 推论 6.7.3 和注 2 的结论也都成立.

定理 6.7.4 若 T 是 Hilbert 空间 X 上的可逆算子, 则 $-T$ 是耗散算子当且仅当 T^{-1} 是耗散算子.

证明 若 $-T$ 是耗散算子, 则对任意 $y \in D(T)$,

$$\Im(y, Ty) = -\Im(Ty, y) = \Im(-Ty, y) \geqslant 0.$$

所以, 对任意 $z \in D(T^{-1})$,

$$\Im(T^{-1}z, z) = \Im(T^{-1}z, T(T^{-1}z)) \geqslant 0,$$

又由于 $T^{-1}z \in D(T)$. 故 T^{-1} 是耗散算子.

反之亦然. □

对于 Hilbert 空间 X 上的稠定算子 T, 类似 6.4 节引入如下两个算子

$$T_{\Im} := \frac{T - T^*}{2\mathrm{i}}, \quad T_{\Re} := \frac{T + T^*}{2}.$$

它们的定义域是 $D(T) \cap D(T^*)$. 所以, 若 $D(T) \subseteq D(T^*)$, 则 $T = T_{\Re} + \mathrm{i}T_{\Im}$ 是耗散算子相当于算子 T 的虚部 $T_{\Im}$ 是非负的; 若 $D(T) \supseteq D(T^*)$, 则 $T^* = T_{\Re} - \mathrm{i}T_{\Im}$; 若 T 是 X 上的有界算子, 则 $T_{\Re}$ 和 $T_{\Im}$ 是自伴算子. 在 X 上, $D(T) \cap D(T^*)$ 是稠密的, 一般情况下, $T_{\Re}$ 和 $T_{\Im}$ 是非自伴算子, 因为它们的共轭算子定义域与 $D(T) \cap D(T^*)$ 不相同.

引理 6.7.5 若 T 是定义在 Hilbert 空间 X 上可逆且具有稠值域的稠定算子, E 和 F 是集合

$$G = \{y \in D(T) \cap D(T^*) \mid Ty = T^*y\} \tag{6.7.23}$$

在 $D(T)$ 和 $D(T^*)$ 上的补集, 则算子 $(T^{-1})_{\Im}$ 的值域包含在 $E \oplus F$ 中.

证明 因为 T 的值域 $R(T)$ 是稠密的, T 是可逆的, 所以, T^* 也是可逆的. 由 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$ 得到

$$(T^{-1})_{\Im}=\frac{T^{-1}-(T^*)^{-1}}{2\mathrm{i}}. \tag{6.7.24}$$

根据 $D(T)=G\oplus E$ 和 $D(T^*)=G\oplus F$ 可知, $D(T^{-1})=R(T)=T(G)\oplus T(E)$ 和 $D((T^*)^{-1})=R(T^*)=T(G)\oplus T^*(F)$, 而且, $D(T^{-1})\cap D((T^*)^{-1})=T(G)\oplus(T(E)\cap T^*(F))$. 由式 (6.7.24), 对任意的 $y\in T(G)$, $(T^{-1})_{\Im}(y)=0$; 对任意 $y\in T(E)\cap T^*(F)$, $(T^{-1})_{\Im}(y)\in E\oplus F$. 结论得证. □

6.7.2 耗散的 Sturm-Liouville 算子根空间的完备性

本小节研究由微分算式 (6.7.1) 在边条件 (6.7.5) 下所生成的耗散算子 L 的根空间的完备性. 首先研究算子 L 的 Green 函数, 利用 Green 函数研究算子 L 的逆算子, 然后给出根空间的完备性.

在边条件 (6.7.5) 中, 令 $f=u=\theta(\cdot,0)$, $g=v=\tau(\cdot,0)$, 并且对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 函数 $\theta(\cdot,\lambda)$ 和 $\tau(\cdot,\lambda)$ 是微分算式 (6.7.1) 满足初始条件 (6.7.3) 的一个基础解系, 由此可以确定 L 的特征.

引理 6.7.6 对任意 $x\in[a,b]$,

$$\phi_{11}:=[\theta(\cdot,\lambda),u](x),\quad \phi_{12}:=[\tau(\cdot,\lambda),u](x),$$

$$\phi_{21}:=[\theta(\cdot,\lambda),v](x),\quad \phi_{22}:=[\tau(\cdot,\lambda),v](x)$$

是 λ 的整函数而且增长阶数 (growth order)$\leqslant 1$, 即对 $i,j=1,2$ 及任意 $\varepsilon>0$, 存在有限常数 $C_{i,j,\varepsilon}$ 使得

$$|\phi_{i,j}|\leqslant C_{i,j,\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon|\lambda|},\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

用 $(A_{2\times2}|B_{2\times2})$ 记微分算式 (6.7.1) 的系数矩阵, 设 $\Phi=(\phi_{ij})_{2\times2}$. 则一个复数 λ_0 是 L 的特征值当且仅当是整函数

$$\Delta(\lambda):=\begin{vmatrix} U_1(\theta(\cdot,\lambda)) & U_1(\tau(\cdot,\lambda)) \\ U_2(\theta(\cdot,\lambda)) & U_2(\tau(\cdot,\lambda)) \end{vmatrix}=\det(A\Phi(a,\lambda)+B\Phi(b,\lambda))$$

的零点, 即 $\Delta(\lambda_0)=0$.

证明 第一部分简单的证明参见文献 [63], 第二部分根据边值问题解的唯一性得结论[197]. □

在此, $\Delta(\lambda)$ 称为算子 L 的特征函数 (characteristic function). 当 $\Delta(\lambda)\neq0$ 时, 特征值 λ_0 的解析重数 (analytic multiplicity) 就是 λ_0 作为 $\Delta(\lambda)$ 的零点的重数; 微分算子 L 的代数重数等于它的解析重数 (参见文献 [124] 第 1 章 §2 及文献 [46]). 根据引理 6.7.1 得到关于 $\Delta(\lambda)$ 的结论.

推论 6.7.7 $\Delta(\lambda)$ 是 λ 的整函数而且增长阶数 $\leqslant 1$, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 C_ε, 使得

$$|\Delta(\lambda)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

而且

$$\limsup_{\lambda \mapsto \infty} \frac{\ln|\Delta(\lambda)|}{|\lambda|} \leqslant 0.$$

根据推论 6.7.7, 可以得到 $\Delta(\lambda)$ 的零点的特性.

引理 6.7.8 设 $\Delta(\lambda) \neq 0$. 用 $\{\lambda_j\}$ 表示 $\Delta(\lambda)$ 的零点, 按零点的重数计, 则

(1) 极限

$$\lim_{r \mapsto \infty} \sum_{|\lambda_j| \leqslant r} \frac{1}{\lambda_j} \tag{6.7.25}$$

存在且有限;

(2) 用 $n(r)$ 记 $\Delta(\lambda)$ 在 $|\lambda| \leqslant r$ 内零点 λ_j 的个数 (按解析重数计), 则

$$\lim_{r \mapsto \infty} \frac{n(r)}{r} = 0; \tag{6.7.26}$$

(3) 若 $\Delta(0) \neq 0$, 则

$$\Delta(\lambda) = \Delta(0) \lim_{r \mapsto \infty} \sum_{|\lambda_j| \leqslant r} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.7.27}$$

证明 证明参见文献 [80]. □

$\Delta \equiv 0$ 有可能成立, 这时每个复平面上的复数都是 L 的特征值. 但当 L 是耗散微分算子时, 这种情况不可能成立.

引理 6.7.9 若微分算子 L 是耗散的, 则 L 的特征值在复平面 $\mathbb{C}$ 上是离散的.

证明 考虑形如矩阵 (6.7.9) 的系数矩阵, 则由式 (6.7.10) 的第二个不等式得到

$$\begin{aligned}4\Im a_{12}\Im b_{22} + 2\Re a_{22}\Re b_{12} - 2\Im a_{22}\Im b_{12} &\geqslant (\Re a_{22})^2 + (\Re b_{12})^2 + (\Im a_{22})^2 + (\Im b_{12})^2 \\ &\geqslant -2\Re a_{22}\Re b_{12} + 2\Im a_{22}\Im b_{12},\end{aligned}$$

所以,

$$\Re a_{22}\Re b_{12} - \Im a_{22}\Im b_{12} + \Im a_{12}\Im b_{22} \geqslant 0.$$

设 r 是上式左边的一个平方根, 令

$$(\psi_{i,j}(\lambda))_{2\times 2} = \Phi_{i,j}(b,\lambda)\Phi_{i,j}(a,\lambda)^{-1},$$

则

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= a_{22}+b_{12}+a_{12}\psi_{11}(\lambda)-\psi_{12}(\lambda)+(a_{22}b_{12}-a_{12}b_{22})\psi_{21}(\lambda)+b_{22}\psi_{22}(\lambda)\\ &= a_{22}+b_{12}-2r+\Delta_1(\lambda)+\mathrm{i}\Delta_2(\lambda),\end{aligned} \tag{6.7.28}$$

其中,

$$\begin{aligned}&\Delta_1(\lambda)=2r+(\Re a_{12})\psi_{11}(\lambda)-\psi_{12}(\lambda)+(r^2-\Re a_{12}\Re b_{22})\psi_{12}(\lambda)+(\Re b_{22})\psi_{22}(\lambda),\\ &\Delta_2(\lambda)=(\Im a_{12})\psi_{11}(\lambda)+c\psi_{21}(\lambda)+(\Im b_{22})\psi_{22}(\lambda),\\ &c=\Re a_{22}\Im b_{12}+\Im a_{22}\Re b_{12}-\Re a_{12}\Im b_{22}-\Im a_{12}\Re b_{22}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

因为 $\Delta_1(\lambda)$ 是自伴边条件

$$\begin{pmatrix} 1 & \Re a_{12} & 0 & r\\ 0 & r & -1 & \Re b_{22}\end{pmatrix}$$

下微分算式 (6.7.1) 所生成算子的特征函数, 它在 $\mathbb{R}$ 上不是常数, 所以, 根据式 (6.7.28) 和 $\Delta_2(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是实数得, $\Delta(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是常数. 又 $\Delta(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上是整函数, 故 $\Delta(\lambda)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的零点是离散的.

同样办法可以证明其他情形. □

以下假设微分算子 L 是耗散的. 根据上面引理, 适当选取 $s\in\mathbb{R}$, 用 $q+sw$ 来代替 q, 使得零不是 L 的特征值, 即 $\mathrm{Ker}L=\{0\}$. 所以, 算子 L 的逆算子 L^{-1} 存在. 利用 Green 函数, 可以得到算子 L^{-1} 积分形式. 设

$$G(x,\xi)=\frac{1}{\Delta(0)}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & g(x,\xi)\\ U_1(u) & U_1(v) & U_1(g(\cdot,\xi))\\ U_2(u) & U_2(v) & U_2(g(\cdot,\xi))\end{vmatrix},$$

其中,

$$g(x,\xi)=\frac{1}{2}\begin{cases} u(x)v(\xi)-u(\xi)v(x), & a<\xi\leqslant x<b,\\ u(\xi)v(x)-u(x)v(\xi), & a<x\leqslant\xi<b.\end{cases} \tag{6.7.29}$$

这里 u,v 是方程 $ly=0$ 满足初始条件 (6.7.3) 的基础解系, 并且

$$\int_a^b\int_a^b|G(x,\xi)|^2w(x)\mathrm{d}xw(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty,$$

所以, 由

$$Bf=\int_a^b G(\cdot,\xi)y(\xi)w(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad \forall y\in L_w^2((a,b),\mathbb{C}) \tag{6.7.30}$$

所确定的积分算子 B 是一个 Hilbert-Schmidt 型算子. 一般情况, B 是紧算子, 但不一定是自伴的. 很容易得出 B 是微分算子 L 的逆算子, 即 $B=L^{-1}$. 所以, 0 不是 L 的谱点, 即 $0\notin\sigma(L)$, B 的根空间与 L 的根空间重合. 因此,

$$\sigma_e(L)=\left\{\frac{1}{\lambda}\mid\lambda\in\sigma_e(B)\backslash\{0\}\right\}=\varnothing,$$

即 L 的根空间在 $L^2_w((a,b),\mathbb{C})$ 的完备性等价于 B 的根空间的完备性.

对于 L 的逆算子 B, 设 $B=B_1+\mathrm{i}B_2$, 其中, $B_1=B_{\Re}$, $B_2=B_{\Im}$. 根据上面讨论可知, B 和 B_1 都是 Hilbert-Schmidt 型算子, 并且 B_1 是自伴算子. 经计算易得到, B_1 是由微分算式 (6.7.1) 生成的自伴 Sturm-Liouville 微分算子的逆.

定理 6.7.10 如果由微分算式 (6.7.1) 在边条件 (6.7.5) 下生成的 Sturm-Liouville 算子 L 是耗散算子, 则 L 的根空间在 Hilbert 空间 $L^2_w((a,b),\mathbb{C})$ 内完备.

证明 根据定理 6.7.4, 如果 L 是耗散算子, 则 $-B$ 也是耗散算子. 又因为对最小定义域中的任意 y, $Ly=L^*y$, 所以, $D(L)$ 最大也只是 2 维扩张. 根据引理 6.7.5 的结论得 B_2 是个有限秩算子. 利用定理 6.4.9, 对于任意的 $\mu\in\mathbb{C}$, 若 $1/\mu\notin\sigma(-B)$, 则

$$D_{-B_1/-B}(\mu)=\frac{D^*_{-B_1}(\mu)}{D^*_{-B}(\mu)}\mathrm{e}^{\mu\mathrm{tr}(B_1-B)}=\frac{D^*_{-B_1}(\mu)}{D^*_{-B}(\mu)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\mathrm{tr}B_2}.$$

其中, $m=v(B)$, $\left\{\frac{1}{\lambda_j}\right\}_{j=1}^{m}$ 是算子 B 的特征值序列, 即 $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ 是算子 L 的特征值序列. 用 Δ_{-L} 表示 $-L$ 的特征函数, 则

$$D^*_{-B}(\mu)=\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_j}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\lambda_j}}=\frac{\Delta_{-L}(\mu)}{\Delta_{-L}(0)}\exp\left(-\mu\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}\right).$$

因为 $-\lambda_j$ 的解析重数和代数重数相同, 设 $\left\{\frac{1}{r_j}\right\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ 是自伴算子 B_1 的特征值序列, 则

$$D^*_{-B_1}(\mu)=\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mu}{r_j}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{r_j}},$$

所以,

$$D_{-B_1/-B}(\mu)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{r_j}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{r_j}}}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_j}0\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\lambda_j}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\mathrm{tr}B_2}.$$

由于 L 是耗散算子, 所以 $\Im\lambda_j \geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots)$, 因此, 对于任意 $t>0$, $-\mathrm{i}t \notin \sigma(L)$, $\dfrac{1}{\mathrm{i}t} \notin \sigma(-B)$. 令 $\mu=\mathrm{i}t$, $t>0$, 注意到 r_j 是实数, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\ln|D_{-B_1/-B}(\mathrm{i}t)| = \frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{r_j}\right)\right| - \frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{\lambda_j}\right)\right| \\ +\mathrm{tr}B_2 - \sum_{j=1}^{m}\Im\frac{1}{\lambda_j}.\end{aligned} \tag{6.7.31}$$

利用定理 6.4.11, 引理 6.7.7 及上面的讨论得

$$\lim_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}|D_{-B_1/(-B)}(\mathrm{i}t)| = 0 \tag{6.7.32}$$

和

$$\limsup_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{r_j}\right)\right| \leqslant 0, \quad \limsup_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{\lambda_j}\right)\right| \leqslant 0. \tag{6.7.33}$$

因为对于任意的 j, $\Im\lambda_j \geqslant 0$, 对任意的 $t>0$,

$$\left|1+\frac{\mathrm{i}t}{\lambda_j}\right|^2 \geqslant \left(1+\frac{t\Im\lambda_j}{|\lambda_j|^2}\right)^2 \geqslant 1, \quad \left|1+\frac{\mathrm{i}t}{r_j}\right|^2 = 1+\frac{t^2}{|r_j|^2} \geqslant 1,$$

则有

$$\ln\left|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{r_j}\right)\right| \geqslant 0, \quad \ln\left|\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{\lambda_j}\right)\right| \geqslant 0.$$

所以,

$$\limsup_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{r_j}\right)\right| = \limsup_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{\mathrm{i}t}{\lambda_j}\right)\right| = 0. \tag{6.7.34}$$

在式 (6.7.31) 中, 令 $t\mapsto\infty$, 利用式 (6.7.32) 和式 (6.7.34) 得

$$\sum_{j=1}^{m}\Im\frac{1}{\lambda_j} = \mathrm{tr}B_2.$$

由定理 6.4.4 可知, $-B$ 的根空间在 Hilbert 空间 $L_w^2((a,b),\mathbb{C})$ 内完备, 故 L 的根空间在 Hilbert 空间 $L_w^2((a,b),\mathbb{C})$ 内也完备. □

推论 6.7.11　如果由微分算式 (6.7.1) 在边条件 (6.7.5) 下生成的 Sturm-Liouville 算子 L 是一个耗散算子, 则它具有无穷多个特征值 (按重数计算).

证明 因为 L 的根空间在 $L^2_w((a,b),\mathbb{C})$ 中完备, 所以, L 的根空间是无穷维的, 这说明了 L 具有无穷多个特征值 (按重数计算). □

定理 6.7.12 如果 T 是 X 上的一个紧的耗散算子, 且 $\mathrm{tr}T_{\Im} \leqslant \infty$,

$$\limsup_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{v(T)}(1-\mathrm{i}t\mu_j(T))\right|\leqslant 0, \tag{6.7.35}$$

$$\limsup_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\prod_{j=1}^{v(T_{\Re})}(1-\mathrm{i}t\mu_j(T_{\Re}))\right|\leqslant 0, \tag{6.7.36}$$

则

$$\sum_{j=1}^{v(K)}\Im\mu_j(T)=\mathrm{tr}T_{\Im}, \tag{6.7.37}$$

并且 T 的根空间在 X 内完备.

推论 6.7.13[63] 若边条件 (6.7.5) 的系数矩阵能表示为形式 (6.7.21), 且 $\Im a_{12}\geqslant 0$, $\Im b_{22}\geqslant 0$, 则 Sturm-Liouville 算子 L 的根空间在 Hilbert 空间 $L^2_w((a,b),\mathbb{C})$ 内完备.

第7章　二阶非自伴微分算子

7.1　基本概念

本章主要研究二阶微分算式

$$l(y) = -y'' + p(x)y, \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{7.1.1}$$

生成的微分算子的相关结论, 其中, $p(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的复值函数, 而且在任何有限区间 $[0,b)$ $(b<\infty)$ 上可积.

定义 7.1.1　在空间 $L^2[0,\infty)$ 中定义流形

$$D_M = \{y \in L^2[0,\infty) \mid y'(x) \in AC_{\text{loc}}[0,\infty),\ l(y) \in L^2[0,\infty)\}. \tag{7.1.2}$$

其中 $AC_{\text{loc}}[0,\infty)$ 表示局部绝对连续 (在任何有限区间 $[0,b)(0<b<\infty)$ 上绝对连续) 函数组成的集合. 称以 D_M 为定义域, 由式 (7.1.1) 生成的微分算子 L_M 为最大算子,

$$L_M y = l(y), \quad \forall y \in D_M. \tag{7.1.3}$$

令 $D_\theta = \{y \in D_M \mid y'(0) - \theta y(0) = 0,\ \theta \in \mathbb{C}\}$. 定义算子 $L_\theta : L_\theta y = l(y)$, $\forall y \in D_\theta$. 显然 $L_\theta \subset L_M$.

当 $p(x)$ 和 θ 均为实值时, 式 (7.1.1) 生成的微分算子是自伴算子, 已有大量的研究成果, 特别是关于自伴域描述、亏指数和谱理论等方面已有较系统和完善的研究结论.

本章主要研究当 $p(x)$ 和 θ 均为非实值, 即当 $\Im p(x)$ 不恒为零时, 式 (7.1.1) 生成的微分算子的谱理论. 下面先介绍 Green 公式和共轭算子的定义.

对任意的 $y, z \in D \subset L^2[\alpha,\beta]$,

$$\int_\alpha^\beta (l(y)z - yl(z))\mathrm{d}x = [yz' - y'z]_\alpha^\beta = [y,z]_\alpha^\beta, \tag{7.1.4}$$

称式 (7.1.4) 为式 (7.1.1) 的 Green 公式, 其中 $[y,z] = yz' - y'z$ 表示 y 和 z 的 Lagrange 双线性型.

定义 7.1.2　微分算式

$$l^+(y) = -y'' + \overline{p}(x)y, \quad x \in [0,\infty), \tag{7.1.5}$$

称为微分算式 (7.1.1) 的共轭算式.

同样可以定义 L_M^+, D_M^+, 其中, L_M^+ 是由式 (7.1.5) 生成的最大算子, D_M^+ 是 L_M^+ 的定义域. 显然有 $y \in D_M \Leftrightarrow \overline{y} \in D_M^+$. 并且 $\forall y \in D_M,\ z \in D_M^+$, 有

$$\int_\alpha^\beta \left(l(y)\overline{z} - y\overline{l^+(z)}\right)\mathrm{d}x = [y\overline{z}' - y'\overline{z}]_\alpha^\beta.$$

由于 $y, z, l(y), l^+(z) \in L^2[0,\infty)$, 所以,

$$\int_0^\infty \left(l(y)\overline{z} - y\overline{l^+(z)}\right)\mathrm{d}x = [y\overline{z}' - y'\overline{z}]_0^\infty, \tag{7.1.6}$$

即

$$(L_M y, z) - (y, L_M^+ z) = [y\overline{z}' - y'\overline{z}]_0^\infty = [y, \overline{z}]_0^\infty. \tag{7.1.7}$$

下面讨论微分算式 (7.1.1) 在空间 $L^2(0,a)$ 内生成的最小算子、最大算子、最小共轭算子和最大共轭算子. 类似定义 7.1.1, 同样在 $L^2(0,a)$ 上定义由式 (7.1.1) 生成的最大算子和最大共轭算子 L_M, L_M^+ 及定义域 D_M, D_M^+. 令

$$D_0 = \{y \in D_M \mid y(0) = y'(0) = y(a) = y'(a) = 0\},$$
$$D_0^+ = \{y \in D_M^+ \mid y(0) = y'(0) = y(a) = y'(a) = 0\},$$

称算子 $L_0 y = l(y)\ \ (y \in D_0)$ 和 $L_0^+ y = l^+(y)\ \ (y \in D_0^+)$ 分别为由式 (7.1.1) 和式 (7.1.5) 生成的最小算子.

引理 7.1.3 $\forall y \in D_M,\ z \in D_0^+$, 有

$$(L_M y, z) = (y, L_0^+ z); \tag{7.1.8}$$

对于任意的 $y \in D_0,\ z \in D_M^+$, 有

$$(L_0 y, z) = (y, L_M^+ z). \tag{7.1.9}$$

证明 根据上面的定义及 Green 公式立得. □

用 R_0, R_0^+ 分别表示 L_0, L_0^+ 的值域, N_0, N_0^+ 分别表示 L_M, L_M^+ 的零空间,

$$N_0 = \{y \in D_M \mid l(y) = 0\}, \quad N_0^+ = \{y \in D_M^+ \mid l^+(y) = 0\}.$$

显然 $y \in N_0 \Leftrightarrow \overline{y} \in N_0^+$.

引理 7.1.4

$$R_0 \oplus N_0^+ = L^2[0,a), \quad R_0^+ \oplus N_0 = L^2[0,a). \tag{7.1.10}$$

证明 只证式 (7.1.10) 中的第一式, $\forall f \in L^2[0,a)$ 与 N_0^+ 正交的充分必要条件是 $f \in R_0$, 即存在 $y \in D_0$, 使得 $l(y) = f$. 设 $\{z_1, z_2\}$ 是 N_0^+ 的一组基, 满足 $l^+(z) = 0$ 和初始条件

$$z_1(a) = 0, \quad z_1'(a) = 1,$$

$$z_2(a) = 1, \quad z_2'(a) = 0.$$

对任意的 $f \in L^2[0,a)$, $f \in N_0^{+\perp} \Leftrightarrow (f, z_1) = (f, z_2) = 0$. 设 y 是满足如下初始条件的解

$$\begin{cases} l(y) = f, \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases} \tag{7.1.11}$$

由 Green 公式得

$$\int_0^a \left(l(y)\overline{z} - y\overline{l^+(z)}\right)\mathrm{d}x = [y\overline{z}' - y'\overline{z}]_0^a = [y, \overline{z}]_0^a = [y, \overline{z}](a),$$

所以, $\int_0^a l(y)\overline{z_1}\mathrm{d}x = y(a)$, 即有

$$(f, z_1) = y(a), \tag{7.1.12}$$

同理可得

$$(f, z_2) = -y'(a). \tag{7.1.13}$$

于是 $(f, z_1) = (f, z_2) = 0 \Leftrightarrow y(a) = y'(a) = 0$. 结合式 (7.1.11) 知这等价于 $y \in D_0$, 即 $f = l(y) = L_0 y \in R_0$, 式 (7.1.10) 的第一式得证.

同样方法可以证明式 (7.1.10) 中第二式. □

引理 7.1.5 算子 L_0 与 L_0^+ 的定义域 D_0 与 D_0^+ 均在 $L^2(0,a)$ 内稠密, 所以 L_0, L_0^+ 是 $L^2(0,a)$ 上的稠定算子.

证明 反证法. 若 D_0 在 $L^2(0,a)$ 中不稠密, 则存在 $f \in L^2(0,a)$, 且 $f \neq 0$, 但 $f \perp D_0$, 即 $\forall y \in D_0$,

$$(y, f) = 0. \tag{7.1.14}$$

设 z 是方程 $l(y) = f$ 的任一解, $z \in D^+$, 则式 (7.1.14) 化为 $(y, L^+ z) = 0$. 根据引理 7.1.3 可知 $(L_0 y, z) = 0$, 即 $z \perp R_0$, 再根据引理 7.1.4 得 $z \in N_0^+$, 所以, $f = l^+(z) = 0$, 矛盾. 因此 D_0 在 $L^2(0,a)$ 内稠密. 同理可证 D_0^+ 在 $L^2(0,a)$ 内稠密. □

引理 7.1.6 下列关系成立:

$$L_0^* = L_M^+, \quad L_0^{+*} = L_M, \tag{7.1.15}$$

$$L_M^* = L_0^+, \quad {L_M^+}^* = L_0,. \tag{7.1.16}$$

证明 只证式 (7.1.15). 由引理 7.1.3 中的式 (7.1.8) 和式 (7.1.9) 知 $L_M^+ \subset L_0^*$ 和 $L_M \subset {L_0^+}^*$ 成立. 下面只需证明 $L_0^* \subset L_M^+$ 和 ${L_0^+}^* \subset L_M$ 即可. 这里只证第一个包含关系, 第二个包含关系同样方法可以证明.

设 $f \in D(L_0^*)$, 且 $g = L_0^* f$, 则对于任意的 $y \in D_0$,

$$(L_0 y, f) = (y, L_0^* f) = (y, g). \tag{7.1.17}$$

设 z 是 $L^+(z) = g$ 的任意解, 其中 $z \in D^+$, 则

$$(y, g) = (y, L^+ z) = (L_0 y, z), \tag{7.1.18}$$

由式 (7.1.17) 和式 (7.1.18) 可得

$$(L_0 y, f - z) = 0, \quad \forall y \in D_0.$$

从而 $f - z \perp R_0$, 即 $f - z \in N_0^+ \subset D^+$, 于是

$$f = z + (f - z) \in D^+,$$

$$L_0^* f = g = L^+ z.$$

所以 $L_0^* \subset L_M^+$, 故 $L_0^* = L_M^+$. 同理 ${L_0^+}^* = L_M$. 同样的办法可以证明式 (7.1.16) 成立.

□

在 $L^2[0, \infty)$ 上, 引入由式 (7.1.1) 生成的最小算子 L_0 和最小共轭算子 L_0^+, 首先定义 L_0' 和 ${L_0^+}'$,

$$L_0' y = l(y), \quad y \in D_0';$$

$${L_0^+}' y = l^+(y), \quad y \in {D_0^+}',$$

其中,

$$D_0' = \{y \in D_M \mid \exists a > 0, \text{ 使得 } y \text{ 在 } [0, a] \text{ 外为零, 且 } y(0) = y'(0) = 0\},$$

$${D_0^+}' = \{y \in D_M^+ \mid \exists a > 0, \text{ 使得 } y \text{ 在 } [0, a] \text{ 外为零, 且 } y(0) = y'(0) = 0\}.$$

引理 7.1.7 D_0' 和 ${D_0^+}'$ 在 $L^2[0, \infty)$ 内是稠密的, 所以, L_0' 和 ${L_0^+}'$ 是 $L^2[0, \infty)$ 内的稠定算子.

证明 对 $\forall a > 0$, 用 $L_{0,a}$, L_a, $L_{0,a}^+$, L_a^+ 分别表示算式 (7.1.1) 在空间 $L^2(0, a)$ 内生成的最小算子、最大算子、最小共轭算子和最大共轭算子. $L^2(0, a)$ 是 $L^2(0, \infty)$ 的一个子空间. $\forall f \in L^2(0, a)$, 可以记为: 当 $x > a$ 时, $f(x) = 0$. 对某个 a, 由引理

7.1.5 可知, $D(L_{0,a}) = D'_0 \cap L^2(0,a)$, 且在 $L^2(0,a)$ 内稠密. $\forall f \in L^2(0,\infty)$, 若 $f \perp D'_0$, 则 $f \perp D(L_{0,a})$, 从而当 $x \in [0,a]$ 时, $f(x) = 0$. 这是因为 $D(L_{0,a})$ 在 $L^2(0,a)$ 内是稠密的. 由 a 的任意性有 $f(x) = 0$ $(x \in [0,\infty))$. 故 D'_0 在 $L^2[0,\infty)$ 内稠密. □

引理 7.1.8 算子 $L'_0, L_0^{+'}$ 与 L_M, L_M^+ 具有如下关系:

$$L_0'^* = L_M^+, \quad L_0^{+'*} = L_M. \tag{7.1.19}$$

证明 $\forall y \in D'_0$, $z \in D^+$, 由式 (7.1.6) 得

$$(L'_0 y, z) = (y, L_M^+ z),$$

即有 $L_M^+ \subset L_0'^*$.

只需再证相反关系 $L_0'^* \subset L_M^+$ 即可. $\forall f \in D(L_0'^*)$, 设

$$L_0'^* f = g,$$

则 $\forall y \in D'_0$, 有

$$(L'_0 y, f) = (y, g). \tag{7.1.20}$$

对于某个 $a > 0$, 考虑 $y \in D'_0$, y 在 $[0,a]$ 外等于零 (即 $y \in D(L_{0,a})$). 令

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,a], \\ 0, & x > a, \end{cases} \qquad g_a(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0,a], \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

则式 (7.1.20) 转化为

$$(L_{0,a} y, f_a)_a = (y, g_a)_a,$$

其中, $(\cdot,\cdot)_a$ 表示 $L^2(0,a)$ 上的内积. 所以 $f_a \in D(L_{0,a}^*)$, $g_a = L_{0,a}^* f$. 由引理 7.1.6 知, $f_a \in D(L_a^+)$, 且 $g_a = L_a^+ f_a$. 由 a 的任意性及 $f \in L^2(0,\infty)$, $g \in L^2(0,\infty)$ 得 $f \in D(L_M^+)$, 且 $g = L^+ f$. 所以, $L_0'^* = L_M^+$.

同样可以证明 $L_0^{+'*} = L_M$. □

根据式 (7.1.19) 可知, L_M 和 L_M^+ 是闭算子, L'_0 和 $L_0^{+'}$ 分别是 L_M 和 L_M^+ 的限制, 所以, L'_0 和 $L_0^{+'}$ 均具有闭包. 用 L_0 和 L_0^+ 分别表示 L'_0 和 $L_0^{+'}$ 的闭包, D_0 和 D_0^+ 表示其闭包的定义域, 称 L_0 和 L_0^+ 分别是由式 (7.1.1) 生成的最小算子和最小共轭算子, 而且满足

$$L_M^* = L_0^+, \quad L_M^{+*} = L_0.$$

所以, 很容易得到下面结论.

定理 7.1.9 算子 L_0 和 L_0^+ 在空间 $L^2[0,\infty)$ 上是两个 J-对称算子, 即

$$L_0 \subset JL_0^* J = JL_M^+ J, \quad L_0^+ \subset JL_0^{+*} J = JL_M J,$$

其中, J 是 $L^2[0,\infty)$ 取复共轭的算子, 即对于 $\forall f\in L^2[0,\infty)$, $Jf(x)=\overline{f(x)}$.

7.2 方程 $l(y)=\lambda y$ 解的近似公式

本节均假设复函数 $p(x)$ 是区间 $[0,\infty)$ 上的可积函数.

7.2.1 关于积分方程的一些引理

本小节主要考虑积分方程

$$u(x,s)=f(x,s)+\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)\ u(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi, \tag{7.2.1}$$

其中, 积分核 $k(x,\xi,s)$ 满足下列条件:

(1) 对于复平面上的某一点集 E 内的一个固定 s 和 $[a,\infty)$ 上固定的 x, $k(x,\xi,s)$ 关于 ξ 在 $[a,\infty)$ 上是可积的.

(2) 存在正数 $\gamma<1$, 使得对 $\forall s\in E$, $\forall x\in[a,\infty)$,

$$\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)|\ \mathrm{d}\xi<\gamma,$$

(3) 对于 $[a,\infty)$ 内固定的 x_0 和 E 内固定的 s_0,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ s\to s_0}}\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)-k(x_0,\xi,s_0)|\ \mathrm{d}\xi=0,$$

其中, $a\leqslant x,x_0<\infty$, $s,s_0\in E$.

(4) 函数 $f(x,s)$ 在 $a\leqslant x<\infty$, $s\in E$ 上关于 x, s 是连续的 (jointly continuous), 有界的.

引理 7.2.1 若积分方程 (7.2.1) 中的核满足条件 (1)~ 条件 (4), 则方程 (7.2.1) 具有一个在 $E_0=[a,\infty)\times E=\{(x,s)\mid x\in[a,\infty),\ s\in E\}$ 上连续有界的解 $u(x,s)$.

证明 利用迭代逼近方程的解. 设

$$u_0(x,s)=0, \tag{7.2.2}$$

$$u_{n+1}(x,s)=f(x,s)+\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)\ u_n(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi, \tag{7.2.3}$$

其中, $a\leqslant x<\infty$, $s\in E$. 下证 $u_{n+1}(x,s)$ 在 E_0 上连续有界, 并且 $\forall(x,s)\in\varepsilon_0$, 积分方程式 (7.2.3) 收敛.

对 $n=0$, 上述结论已成立. 假设当 $n\leqslant m$ 时上述结论正确, 即 $\forall(x,s)\in E_0$, $|u_m(x,s)|\leqslant c_m$, 则当 $n=m+1$ 时,

$$\left|\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)\ u_m(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi\right|\leqslant c_m\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)|\ \mathrm{d}\xi\leqslant c_m\gamma<c_m,$$

从而证明了积分方程 (7.2.3) 的收敛性和 $u_{m+1}(x)$ 的有界性.

对于 $(x_0,s_0)\in E_0$, 有

$$
\begin{aligned}
&|u_{m+1}(x,s)-u_{m+1}(x_0,s_0)|\\
=&\left|\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)u_m(\xi,s)\mathrm{d}\xi-\int_a^{\infty}k(x_0,\xi,s_0)u_m(\xi,s_0)\ \mathrm{d}\xi\right|\\
=&\left|\int_a^{\infty}[k(x,\xi,s)-k(x_0,\xi,s_0)]u_m(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi\right.\\
&\left.+\int_a^{\infty}k(x_0,\xi,s_0)[u_m(\xi,s)-u_m(\xi,s_0)]\ \mathrm{d}\xi\right|\\
\leqslant&\left|\int_a^{\infty}[k(x,\xi,s)-k(x_0,\xi,s_0)]u_m(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi\right|\\
&+\left|\int_a^{N}k(x_0,\xi,s_0)[u_m(\xi,s)-u_m(\xi,s_0)]\ \mathrm{d}\xi\right|\\
&+\left|\int_N^{\infty}k(x_0,\xi,s_0)[u_m(\xi,s)-u_m(\xi,s_0)]\ \mathrm{d}\xi\right|\\
\leqslant&\, c_m\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)-k(x_0,\xi,s_0)|\ \mathrm{d}\xi+\gamma\max_{a\leqslant\xi\leqslant N}|u_m(\xi,s)-u_m(\xi,s_0)|\\
&+2c_m\int_N^{\infty}|k(x_0,\xi,s_0)|\ \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}\tag{7.2.4}
$$

取 N 充分大, (x,s) 充分接近 (x_0,s_0), 由 $k(x_0,\xi,s_0)$ 的性质及 $u_m(\xi,s)$ 的连续性知式 (7.2.4) 右端可以充分小, 所以, $u_{m+1}(\xi,s)$ 在 E_0 上连续.

考虑级数

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,s)+[u_1(x,s)-u_0(x,s)]+[u_2(x,s)-u_1(x,s)]+\cdots\\
&+[u_n(x,s)-u_{n-1}(x,s)]+[u_{n+1}(x,s)-u_n(x,s)]+\cdots,
\end{aligned}\tag{7.2.5}
$$

令

$$
u_n=\sup_{(x,s)\in E_0}|u_n(x,s)-u_{n-1}(x,s)|,\quad n=1,2,\cdots,
$$

并且设 $u_0=0$, 则

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}(x,s)-u_n(x,s)|=&\left|\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)[u_n(\xi,s)-u_{n-1}(\xi,s)]\ \mathrm{d}\xi\right|\\
\leqslant&\, u_n\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)|\ \mathrm{d}\xi\leqslant\gamma u_n,
\end{aligned}
$$

即

$$
u_{n+1}\leqslant v_n\gamma.
$$

又由于 $\gamma<1$, 所以, 级数

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛. 从而级数 (7.2.5) 在 E_0 上一致收敛, 并且

$$u(x,s)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x,s)-u_{n-1}(x,s)]=\lim_{n\to\infty}u_n(x,s).$$

所以, $u(x,s)$ 是积分方程 (7.2.1) 的解, 而且根据 $u_m(x,s)$ 的性质以及在 E_0 上的一致收敛性可得 $u(x,s)$ 在 E_0 上连续并有界. □

引理 7.2.2 若条件 (1)~ 条件 (4) 成立, 并且

(5) E 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开集;

(6) 对区间 $[a,\infty)$ 中的每个固定的 x, $f(x,s)$ 在 E 上是解析函数;

(7) 对每个固定的 $x\in[a,\infty)$, 每个满足条件条件 (4)~ 条件 (6) 的函数 $f(x,s)$, 积分 $\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)\ f(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi$ 在 E 上是解析函数,

则对每个在 $[a,\infty)$ 上固定的 x, 方程 (7.2.1) 的解 $u(x,s)$ 在 E 上是解析函数.

事实上, 对每个固定 $x\in[a,\infty)$, $u_n(x,s)$ 在 E 上是解析函数, 由一致收敛性得 $u(x,s)$ 在 E 上也是解析函数.

注 1 若 $q(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上可积, $\varphi_1(x,\xi,s),\varphi_2(x,\xi,s)$ 在 $a\leqslant x,\xi<\infty$, $s\in E$ 上满足条件:

$$c\int_a^{\infty}|q(\xi)|\ \mathrm{d}\xi<1,\quad c=\max\left\{\sup|\varphi_1(x,\xi,s)|,\sup|\varphi_2(x,\xi,s)|\right\},$$

则

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}\varphi_1(x,\xi,s)q(\xi), & a\leqslant\xi<x,\\ \varphi_2(x,\xi,s)q(\xi), & a\leqslant x<\xi,\end{cases}\tag{7.2.6}$$

满足条件 (1)~ 条件 (3).

注 2 若 $\varphi_1(x,\xi,s)$, $\varphi_2(x,\xi,s)$ 对于固定的 $\xi,x\in[a,b]$, 关于 s 在 E 上解析, 则 $k(x,\xi,s)$ 满足条件 (7).

7.2.2 方程 $l(y)=\lambda y$ 的解系

下面考虑微分方程

$$l(y)=\lambda y\tag{7.2.7}$$

基础解的性质. 上述方程 (7.2.7) 可化为

$$y''+\lambda y=p(x)y.\tag{7.2.8}$$

利用常数变易法可得方程 (7.2.8) 的解,

$$y(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\int_{x_1}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}p(\xi)y(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_{x_2}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}p(\xi)y(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi, \tag{7.2.9}$$

其中, $s=\sqrt{\lambda}=\sigma+\mathrm{i}\tau,\ 0\leqslant\arg s<\pi,\ \tau\geqslant 0.$

在式 (7.2.9) 中令 $c_1=1, c_2=0, x_1=x_2=\infty$, 则得到方程 (7.2.7) 的一个特殊解

$$y(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_{x}^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi)y(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi. \tag{7.2.10}$$

根据积分方程理论可知, 当 x 充分大时, 方程 (7.2.10) 有解.

设 $y(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s)$, 则方程

$$z(x,s)=1+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_{x}^{\infty}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi)z(\xi,x)\ \mathrm{d}\xi \tag{7.2.11}$$

有一个非零解 $z(x,s)$.

下面考虑积分核 $k(x,\xi,s)$ 为如下形式

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}0, & a\leqslant\xi<x,\\ \dfrac{\mathrm{i}}{2s}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi), & a\leqslant x<\xi,\end{cases} \tag{7.2.12}$$

的积分方程 (7.2.1), 即在式 (7.2.6) 中,

$$\varphi_1(x,\xi,s)=0,\quad \varphi_2(x,\xi,s)=\frac{\mathrm{i}}{2s}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}].$$

设 E 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的集合: $E=\{s\in\mathbb{C}\mid \Im s\geqslant 0,\ |s|\geqslant\gamma\geqslant 0\}$, 则对 $\xi>x$ 且 $s\in E$,

$$|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}|=\mathrm{e}^{-2\Im s(\xi-x)}\leqslant 1,$$

所以,

$$|\varphi_2(x,\xi,s)|\leqslant\frac{1}{\gamma}.$$

当 $\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_a^{\infty}|p(x)|\ \mathrm{d}\xi<1$ 时, 根据引理 7.2.2 的注 1 可知, 核 $k(x,\xi,s)$ 满足引理 7.2.1 的所有条件, 从而方程 (7.2.11) 具有一个关于 (x,s) 连续的, 在 $E_0=\{(x,s)\mid x\in[a,\infty),\ s\in E\}$ 上有界的解 $z(x,s)$, 而且在上半平面为解析函数. 所以,

$$y(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s) \tag{7.2.13}$$

是积分方程 (7.2.10) 的解, 也是方程 (7.2.7) 的一个满足一定初始条件的解.

将解 (7.2.13) 在 $[0,\infty)$ 上延拓后记为 $y_1(x,s)$. 显然 $y_1(x,s)$ 可以延拓到 $[0,a]$ 上, 使其在 $x=a$ 处满足条件 $y=y_1$, $y'=y_1'$. y_1 在 $[0,a]$ 上满足方程 (7.2.10), 所以, $y_1(x,s)$ 就是在 $[0,\infty)$ 上方程 (7.2.10) 的解, 也是方程 (7.2.7) 的解, 即有如下结论.

定理 7.2.3 方程 (7.2.7) 存在一个解 $y_1(x,s)$ 满足积分方程

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-\xi)}]p(\xi)y_1(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.2.14}$$

其中, $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s)$, $z(x,s)$ 在区域 $\{(x,s)\mid a\leqslant x<\infty,\ |s|\geqslant\gamma>0,\ \Im s\geqslant 0\}$ 是有界的, 并且选取充分大 a, 使得 $\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_a^{\infty}|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi<1$, 则 $y_1(x,s)$ 关于 x,s $(x\geqslant 0,\ \Im s\geqslant 0,\ s\neq 0)$ 是连续的. 对固定的 $x\in[0,\infty)$, $y_1(x,s)$ 在 $\Im s>0$ 上关于 s 是一个解析函数.

同样的办法在式 (7.2.9) 中令 $c_1=0,c_2=1,x_1=\infty,x_2=a$, 得到如下结论.

定理 7.2.4 对固定的 $\gamma>0$, $|s|\geqslant\gamma$, $\Im s>0$, 方程 (7.2.7) 存在一个解 $y_2(x,s)$ 满足积分方程

$$\begin{aligned}y_2(x,s)=&\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_a^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}p(\xi)y_2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\\&-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}p(\xi)y_2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}\tag{7.2.15}$$

其中选取 a 充分大, 可使得 $\dfrac{1}{2\gamma}\displaystyle\int_a^{\infty}|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi<1$,

$$y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}u(x,s),$$

$u(x,s)$ 在区域 $\{(x,s)\mid a\leqslant x<\infty,\ |s|\geqslant\gamma>0,\ \Im s\geqslant 0\}$ 上有界, 则函数 $y_2(x,s)$ 关于 x,s $(x\geqslant a,\ \Im s\geqslant 0,\ |s|\geqslant\gamma)$ 是连续的, 对 $[0,\infty)$ 中的每一个固定值 x, $y_2(x,s)$ 在 $\{s\in\mathbb{C}\mid \Im s>0,|s|>\gamma\}$ 上是关于 s 的解析函数.

注 在此情况下,

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(x-\xi)}p(\xi), & a\leqslant\xi<x<\infty,\\[2mm] -\dfrac{\mathrm{i}}{2s}p(\xi), & a\leqslant x<\xi<\infty.\end{cases}\tag{7.2.16}$$

为了得到方程 (7.2.1) 在 s 为非负实数时的一个特殊解, 在式 (7.2.9) 中令 $c_1=0$, $c_2=1$, $x_1=x_2=\infty$, 则得下述定理.

定理 7.2.5 方程 (7.2.7) 存在一个解 $y_3(x,s)$ 满足积分方程

$$y_3(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-\xi)}]p(\xi)y_3(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi,$$

其中, $y_3(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}w(x,s)$, 函数 $w(x,s)$ 在区域 $\{(x,s)\mid a\leqslant x<\infty,\ s\geqslant\gamma>0\}$ 上有界, 并且对充分大的 a, 当 $\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_a^\infty |p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi<1$ 时, 函数 $y_3(x,s)$ 在 $\{(x,s)\mid a\leqslant x<\infty,\ s>0\}$ 上关于 x,s 连续.

7.2.3　$y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$, $y_3(x,s)$ 的渐近估计 (当 $x\to+\infty$ 时)

定理 7.2.6　当 $x\to+\infty$ 时,

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)], \tag{7.2.17}$$

$$y_1'(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[\mathrm{i}s+o(1)], \tag{7.2.18}$$

关于 s 在区域 $\{s\mid |s|\geqslant\gamma>0, \Im s\geqslant 0\}$ 上一致成立.

证明　考虑积分方程

$$\begin{aligned}z(x,s)&=1-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty \mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(x-\xi)}p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\\&=1+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(x-\xi)}]p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}\tag{7.2.19}$$

对充分大的 a, 当 $|s|\geqslant\gamma>0$, $x\geqslant a$ 时, 由定理 7.2.3 可知, $z(x,s)$ 在上述区域内有界, 不妨设 $|z(x,s)|\leqslant c_1$, 则

$$\left|\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{c_1}{\gamma}\int_x^\infty|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi,$$

而 $\displaystyle\int_x^\infty |p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\to 0\ (x\to+\infty)$, 所以, 当 $|s|\geqslant\gamma$, $\Im s>0$, $x\to+\infty$ 时,

$$z(x,s)=1+o(1)\quad\Rightarrow\quad y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}(1+o(1)).$$

同样由

$$y_1'(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left\{\mathrm{i}s-\frac{1}{2}\int_x^\infty[1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\right\}$$

可得 $y_1'(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}(\mathrm{i}s+o(1))$.　□

定理 7.2.7　对固定的 $\gamma>0$, 当 $x\to+\infty$ 时,

$$y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)], \tag{7.2.20}$$

$$y_2'(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[-\mathrm{i}s+o(1)], \tag{7.2.21}$$

在 $\{s\mid |s|\geqslant\gamma, \Im s\geqslant\varepsilon>0\}$ 上一致成立.

证明 考虑积分方程

$$u(x,s)=1-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_a^x \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi(x-s)}p(\xi)u(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty p(\xi)u(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$

的解 $u(x,\xi)$. 由定理 7.2.4 可知, 在区域 $\{(x,s)\mid x\geqslant a,\ |s|\geqslant\gamma\}$ 中 $u(x,\xi)$ 有界, 不妨设 $|u(x,s)|\leqslant c_2$ 则对 $|s|\geqslant\gamma$, $\Im s\geqslant\varepsilon>0$, 且 $x\geqslant a$,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_a^x \mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(x-\xi)}p(\xi)u(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\right|\\ \leqslant\ &\frac{c_2}{2\gamma}\int_a^x \mathrm{e}^{-2\varepsilon(x-\xi)}|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\ =\ &\frac{c_2}{2\gamma}\left(\int_a^{\frac12 x}\mathrm{e}^{-2\varepsilon(x-\xi)}|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\int_{\frac12 x}^x \mathrm{e}^{-2\varepsilon(x-\xi)}|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right)\\ \leqslant\ &\frac{c_2}{2\gamma}\left(\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\int_a^\infty |p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\int_{\frac12 x}^x |p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right),\end{aligned}\tag{7.2.22}$$

并且

$$\left|\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty p(\xi)u(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{c_2}{2\gamma}\int_x^\infty |p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi,\tag{7.2.23}$$

当 $x\to+\infty$ 时, 式 (7.2.22) 和式 (7.2.23) 的左端一致收敛于 0, 所以, $u(x,s)=1+o(1)$, 从而证得式 (7.2.20) 和式 (7.2.21) 成立. □

同样办法可得下述定理.

定理 7.2.8 当 $x\to+\infty$ 时,

$$y_3(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)],\tag{7.2.24}$$

$$y_3'(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[-\mathrm{i}s+o(1)]\tag{7.2.25}$$

关于 s 在区域 $0<\gamma\leqslant s<\infty$ 内一致成立.

根据上述结论可得到关于 $y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$ 和 $y_1(x,s)$,$y_3(x,s)$ 的 Wronski 行列式.

定理 7.2.9 $y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$ 和 $y_1(x,s)$, $y_3(x,s)$ 的 Wronski 行列式满足

$$W(y_1,y_2)=-2\mathrm{i}s,\tag{7.2.26}$$

$$W(y_1,y_3)=-2\mathrm{i}s.\tag{7.2.27}$$

证明 由定理 7.2.6, 定理 7.2.7 和定理 7.2.8 知, 对 $y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 的估计, 于是得当 $x\to+\infty$ 时,

$$W(y_1,y_2)=-2\mathrm{i}s[1+o(1)],\quad W(y_1,y_3)=-2\mathrm{i}s[1+o(1)],$$

由于 $W(y_1,y_2)$ 和 $W(y_1,y_3)$ 不依赖于 x, 所以, $o(1)=0$. □

7.2.4　$y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$, $y_3(x,s)$ 的渐近估计 (当 $s\to\infty$ 时)

定理 7.2.10　对 $\Im s\geqslant 0$, 当 $s\to\infty$ 时,

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \tag{7.2.28}$$

$$y_1'(x,s)=\mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right] \tag{7.2.29}$$

关于 x 在区间 $[0,\infty)$ 上一致成立.

证明　在定理 7.2.6 的证明中, 取 $a=0$, 对充分大的 γ 使得

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty |p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi<1,$$

则 $y(x,s)$ 有界, 即存在 c_1, 当 $0\leqslant x<\infty$, $|s|\geqslant\gamma$ 时, $|z(x,s)|\leqslant c_1$. 于是

$$\left|\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi)z(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{c}{|s|}\int_0^\infty|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi=O\left(\frac{1}{s}\right).$$

所以, $z(x.s)=1+O\left(\dfrac{1}{s}\right)$, 由此可得定理结论成立.　□

同样的办法, 利用定理 7.2.7 和定理 7.2.8 可得下述定理.

定理 7.2.11　对 $\Im s\geqslant 0$, 当 $s\to\infty$ 时,

$$y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \tag{7.2.30}$$

$$y_2'(x,s)=-\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right] \tag{7.2.31}$$

关于 x 在 $[a,\infty)$ 上一致成立.

定理 7.2.12　对 $s>0$, 当 $s\to\infty$ 时,

$$y_3(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \tag{7.2.32}$$

$$y_3'(x,s)=-\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right] \tag{7.2.33}$$

关于 x 在区间 $[0,\infty)$ 上一致成立.

在本节的后面恒设 $p(x)$ 满足对某 $\varepsilon>0$,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x<\infty. \tag{7.2.34}$$

下面考虑在式 (7.2.34) 的假设下, $y_1(x,s)$, $y_3(x,s)$ 的性质及其估计式.

定理 7.2.13 若条件 (7.2.34) 成立, 则方程 (7.2.8) 在对应的区域 $\left\{(x,s)\mid 0\leqslant x<\infty,\ \Im s>-\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ 和 $\left\{(x,s)\mid 0\leqslant x<\infty,\ \Im s<\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ 上解 $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 存在. 对任意固定的 $x\in[0,\infty)$, $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 分别在区域 $\Im s>-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 和 $\Im s<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 上解析; $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 的近似公式 (7.2.17), 近似公式 (7.2.18) 和式 (7.2.24), 式 (7.2.25) 分别关于 s 在区域 $\Im s\geqslant-\varepsilon_1$ 和 $\Im s\leqslant\varepsilon_1$ $\left(\text{其中 } 0<\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 上一致成立; $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 的近似公式 (7.2.28), 近似公式 (7.2.29) 和式 (7.2.32), 式 (7.2.33) 分别在区域 $\Im s>-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 和 $\Im s<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 上关于 $x\in[0,\infty)$ 一致成立.

证明 首先给出一些基本不等式:

$$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|\leqslant 2e^{\Re z},\quad \Re z\geqslant 0;\tag{7.2.35}$$

$$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|\leqslant 2,\quad \Re z\leqslant 0.\tag{7.2.36}$$

令 $z=x+iy$, 对 $|z|\geqslant 1$, 就有

$$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|\leqslant|e^z-1|\leqslant|e^z|+1=e^x+1.$$

所以, 对 $|z|\geqslant 1$, $\left|\dfrac{e^z-1}{z}\right|\leqslant\begin{cases}2, & x\leqslant 0,\\ 2e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 对 $|z|<1$,

$$\left|\frac{e^z-1}{z}\right|=\left|1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right|\leqslant 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e-1<2.$$

当 $x\geqslant 0$ 时, $\left|\dfrac{e^z-1}{z}\right|<2e^x$. 方程 (7.2.11) 的积分核 (7.2.12) 表示为如下形式:

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}0, & a\leqslant\xi<x,\\ \dfrac{i}{2s\xi}[1-e^{2is(\xi-x)}]e^{-2\varepsilon_1\xi}p(\xi), & \xi>x\geqslant a,\end{cases}\tag{7.2.37}$$

即有 $\varphi_1(x,\xi,s)=0$, $\varphi_2(x,\xi,s)=\dfrac{i}{2s\xi}[1-e^{2is(\xi-x)}]e^{-2\varepsilon_1\xi}$. 根据不等式 (7.2.35), 对 $\Im s\geqslant-\varepsilon_1$ $\left(\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $s=\sigma+i\tau$, $\tau\leqslant 0$, $\xi\geqslant x$, 有 $\Re(2is(\xi-x))\geqslant 0$, 从而

$$|\varphi_2(x,\xi,s)|=\left|\frac{1}{2i(\xi-x)}[1-e^{2is(\xi-x)}]e^{-2\varepsilon_1\xi}\right|\cdot\left|\frac{\xi-x}{\xi}\right|\leqslant 2e^{\Re[2is(\xi-x)]}e^{-2\varepsilon_1\xi}$$

$$=2e^{-2\tau(\xi-x)}e^{-2\varepsilon_1\xi}\leqslant 2e^{2\varepsilon_1(\xi-x)}e^{-2\varepsilon_1\xi}=2e^{-2\varepsilon_1 x}\leqslant 2.$$

同样由 (7.2.36), 对 $\Im s \geqslant -\varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}\right), s = \sigma + \mathrm{i}\tau, \tau \geqslant 0, \xi \geqslant x$, 有 $\Re(2\mathrm{i}s(\xi - x)) \leqslant 0$, 故 $|\varphi_2(x, \xi, s)| \leqslant 2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_1 x} \leqslant 2$.

用 $x\mathrm{e}^{2\varepsilon_1 x}p(x)$ 代替 $p(x)$, 则引理 7.2.1 和引理 7.2.2 的条件满足, 并且由 $2\varepsilon_1 < \varepsilon$, 所以, $x\mathrm{e}^{2\varepsilon_1 x}p(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上可积 $\left(这是因为\ x\mathrm{e}^{2\varepsilon_1 x}p(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{(\varepsilon - 2\varepsilon_1)x}}\mathrm{e}^{\varepsilon x}p(x)\right)$, 因此方程 (7.2.8) 的解 $y_1(x, s)$ 存在, 且在 $\Im s > -\dfrac{\varepsilon}{2}$ 上解析. 类似定理 7.2.6 和定理 7.2.10 的证明可以得到关于 $y_1(x, s)$ 的估计. 同样办法得到关于 $y_3(x, s)$ 的相关结论. □

定理 7.2.14　若条件 (7.2.34) 成立, 则当 $s = 0$ 时, 方程 (7.2.8) 有两个线性无关解 $y_1(x), y_2(x)$ 满足积分方程

$$y_1(x) = 1 + \int_x^\infty (\xi - x)p(\xi)y_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.2.38}$$

$$y_2(x) = x + \int_x^\infty (\xi - x)p(\xi)y_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{7.2.39}$$

当 $x \to +\infty$ 时, 对 $\forall \varepsilon_1 < \varepsilon$, 有

$$\begin{cases} y_1(x) = 1 + o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}), \\ y_1'(x) = o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}); \end{cases} \tag{7.2.40}$$

$$\begin{cases} y_2(x) = x[1 + o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x})], \\ y_2'(x) = 1 + o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}). \end{cases} \tag{7.2.41}$$

证明　(1) 在方程 (7.2.38) 中, 令

$$k(x, \xi, s) = \begin{cases} 0, & \xi < x, \\ \left(1 - \dfrac{x}{\xi}\right)\xi p(\xi), & \xi > x, \end{cases}$$

则 $\varphi_1(x, \xi, s) = 0$, $\varphi_2(x, \xi, s) = 1 - \dfrac{x}{\xi}$. 在引理 7.2.1 中, 用 $xp(x)$ 代替 $p(x)$, 则它满足引理 7.2.1 的条件, φ_1, φ_2 不依赖于 s. 所以, 方程 (7.2.38) 在 $[a, \infty)$ 上有一个解 $y_1(x)$ 是有界的, 设 $|y_1(x)| \leqslant c\ (x \in [a, \infty))$, 则对 $x \geqslant a$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\int_x^\infty (\xi - x)p(\xi)y_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| &\leqslant c\int_x^\infty \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)\xi|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant c\int_x^\infty \xi|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant c\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}\int_x^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon_1 \xi}\xi|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}). \end{aligned}$$

$\left(这是因为\ \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon_1 \xi}\xi|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\ 有界, 所以, \int_x^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon_1 \xi}\xi|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = o(1),\quad x \to +\infty.\right)$

同理 $y_1'(x)=-\int_x^\infty p(\xi)y_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi=o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x})$, 即得式 (7.2.40).

(2) 在方程 (7.2.39) 中, 令 $y_2(x)=xu_2(x)$, 则得

$$u_2(x)=1+\int_x^\infty(\xi-x)\frac{\xi}{x}\,p(\xi)\,u_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{7.2.42}$$

令

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}0, & \xi<x,\\ \left(1-\dfrac{x}{\xi}\right)\dfrac{1}{x}\xi^2p(\xi), & \xi>x,\end{cases}$$

利用 $\xi^2p(\xi)$ 代替 $p(\xi)$, 它满足引理 7.2.1 的所有条件, 于是方程 (7.2.42) 在 $[a,\infty)$ 上存在一个有界的解 $u_2(x)$, 设 $|u_2(x)|\leqslant c\ \ (x\geqslant a)$, 则对 $x\geqslant a$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_x^\infty(\xi-x)\,\frac{\xi}{x}\,p(\xi)\,u_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\\ \leqslant\, & c\int_x^\infty\left(1-\frac{x}{\xi}\right)\frac{1}{x}\,\xi^2\,p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ \leqslant\, & \frac{c}{a}\int_x^\infty\xi^2\,|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\leqslant\frac{c}{a}\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}\int_x^\infty\mathrm{e}^{\varepsilon_1\xi}\,\xi^2\,|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi=o(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 x}).\end{aligned}$$

又

$$y_2'(x)=1-\int_x^\infty p(\xi)\,y_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi=1-\int_x^\infty\xi\,p(\xi)\,u_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

所以, 式 (7.2.41) 得证. □

定理 7.2.15 设条件 (7.2.34) 成立, $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 定义同定理 7.2.3 和定理 7.2.5 中一样, 是方程 (7.2.8) 的解. 令 $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s)$, $y_3(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}w(x,s)$, 则 $z(x,s)-y_1(x)=s\zeta(x,s)$, $w(x,s)-y_1(x)=s\nu(x,s)$, 且当 a 充分大时, 对于 $x\geqslant a$, 对所有 $s:\Im s\geqslant-\varepsilon_1\ \ \left(\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, 都有 $|\zeta(x,s)|\leqslant c_1$; 对所有 $s:\Im s\leqslant\varepsilon_1\ \left(\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $|\nu(x,s)|\leqslant c_2$, 其中, c_1,c_2 是常数, $y_1(x)$ 由定理 7.2.14 给出.

证明 (1) 首先给出下列不等式:

当 $\Re z\leqslant 0$ 时, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^z-1-z}{z^2}\right|\leqslant 3$;

当 $\Re z\geqslant 0$ 时, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^z-1-z}{z^2}\right|\leqslant 3\mathrm{e}^{\Re z}$.

事实上, 当 $|z|\leqslant 1$ 时,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z^2}\right|=\left|\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots\right|\leqslant\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=\mathrm{e}-2<1;$$

当 $|z|>1$ 时, 记 $z=x+\mathrm{i}y$, 则当 $\Re z=x\leqslant 0$ 时,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z^2}\right|\leqslant|\mathrm{e}^z-1|+1\leqslant|\mathrm{e}^z|+2=\mathrm{e}^x+2\leqslant 3,$$

而当 $\Re z=x\geqslant 0$ 时,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z^2}\right|\leqslant \mathrm{e}^x+2\leqslant \mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x=3\mathrm{e}^x.$$

所以, 所述两个不等式成立.

(2) 其次证明 $|\zeta(x,s)|\leqslant c_1$.

对于 s, 若 $\Im s\geqslant-\varepsilon_1$ $\left(\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, 则由定理 7.2.3 中关于 $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s)$ 及定理 7.2.14 中关于 $y_1(x)$ 的定义得

$$z(x,s)-y_1(x)=\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi-\int_x^\infty(\xi-x)p(\xi)y_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

或者

$$\begin{aligned}z(x,s)-y_1(x)=&\int_x^\infty\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}-1-2\mathrm{i}s(\xi-x)}{2\mathrm{i}s(\xi-x)^2}(\xi-x)^2p(\xi)z(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\\&+\int_x^\infty(\xi-x)[\zeta(\xi,x)-y_1(\xi)]p(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

根据 (1) 的讨论, 当 $\Im s=\tau\geqslant 0$ 时, 有

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}-1-2\mathrm{i}s(\xi-x)}{[2\mathrm{i}s(\xi-x)]^2}\right|\leqslant 3;$$

当 $\Im s=\tau\leqslant 0$ 时,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}-1-2\mathrm{i}s(\xi-x)}{[2\mathrm{i}s(\xi-x)]^2}\right|\leqslant 3\mathrm{e}^{-2\tau(\xi-x)}\leqslant 3\mathrm{e}^{2\varepsilon_1(\xi-x)}\leqslant 3\mathrm{e}^{2\varepsilon_1\xi}.$$

当 $s\neq 0$, $\Im s\geqslant-\varepsilon_1$ $\left(\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 时,

$$\zeta(x,s)=\frac{z(x,s)-y_1(x)}{s}.$$

对固定的 s, 当 $x\in[a,\infty)$ 时, 根据定理 7.2.3 和定理 7.2.14, 函数 $\zeta(x,s)$ 是有界的. 假设 $m(s)=\sup\limits_{a\leqslant x<\infty}|\zeta(x,s)|$, 由定理 7.2.3 知, $z(x,s)$ 在 $[a,\infty)$, $\Im s\geqslant-\varepsilon_1$ 上是有界函数. 设

$$|z(x,s)|\leqslant c,\quad x\in[a,\infty),\quad \Im s\geqslant-\varepsilon_1.$$

根据上面估计, 当 $x\geqslant a$ 时有

$$\left|\frac{z(x,s)-y_1(x)}{s}\right|\leqslant 6c\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{2\varepsilon_1\xi}(x-\xi)^2|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi+m(s)\int_x^{\infty}(\xi-x)|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi$$
$$\leqslant 6c\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{2\varepsilon_1\xi}\xi^2|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi+m(s)\int_x^{\infty}\xi|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi,$$

所以,

$$m(s)\leqslant 6c\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{2\varepsilon_1\xi}\xi^2|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi+m(s)\int_a^{\infty}\xi|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi.$$

选取充分大 a, 使得 $\int_a^{\infty}\xi|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi<1$, 则

$$m(s)\leqslant\frac{6c\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{2\varepsilon_1\xi}\xi^2|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi}{1-\int_a^{\infty}\xi|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi}.$$

故当 $x\geqslant a$, $s\neq 0$, $\Im s\geqslant-\varepsilon_1$ 时,

$$|\zeta(x,s)|\leqslant\frac{6c\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{2\varepsilon_1\xi}\xi^2|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi}{1-\int_a^{\infty}\xi|p(\xi)|\ \mathrm{d}\xi}.$$

同理可证 $\nu(x,s)$ 有界. □

推论 7.2.16 令 $z(x,s)-w(x,s)=s\omega(x,s)$. 若条件 (7.2.34) 成立, 则对充分大的 a, 当 $x\geqslant a$, $|\Im s|\leqslant\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时, $|\omega(x,s)|\leqslant c$.

推论 7.2.17 对于 $0\leqslant x<\infty$, 关系式 $y_1(x,0)=y_3(x,0)=y_1(x)$ 成立.

7.3 算子 L_θ 的预解算子及其谱

7.3.1 算子 L_θ 在上半平面 ($\Im s\geqslant 0$) 的特征值

本节研究微分算子

$$L_\theta y=l(y),$$

其中, $y\in D(L_\theta)=\{y\in D_M\mid y'(0)-\theta y(0)=0\}=D_\theta$. 设 L_0, L_M 是分别由微分算式 (7.1.1) 生成的最小算子和最大算子, 则根据第 7.1 节及第 4 章的讨论知

$$L_0\subset L_\theta\subset L_M.$$

当 $p(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数, 并且 $p(x)\in L_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$ 时, L_0 是实对称微分算子, 而且 $L_0^*=L_M$. 如果 $p(x)\in L[0,\infty)$, 或者 $\mathrm{e}^{\varepsilon x}p(x)\in L[0,\infty)$ 是实函数, 则根据定理 7.2.6 估计可知, 方程 $ly=\lambda y$ 的解 $y_1(x,s)$ 和 $y_2(x,s)$ 至少有一个不属于

$L^2[0,\infty)$, 所以, 微分算式 (7.1.1) 是极限点型的, 即 $\operatorname{def}(L_0) = (1,1)$. 当 $\theta \in \mathbb{R}$ 时, L_θ 是自伴微分算子, 即 $L_\theta = L_\theta^*$.

若 $p(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的复值函数, 且 $p(x) \in L_{\text{loc}}[0,\infty)$, 则 L_0 是 J-对称微分算子, 而且 $L_0^* = L_M^+$, $L_M^* = L_0^+$. 如果 $p(x) \in L[0,\infty)$, 或者 $\mathrm{e}^{\varepsilon x}p(x) \in L[0,\infty)$, 那么根据定理 7.2.6 的估计可知, 方程 $ly = \lambda y$ 的解 $y_1(x,s)$ 和 $y_2(x,s)$ 至少有一个不属于 $L^2[0,\infty)$, 所以, 微分算式 (7.1.1) 是极限点型的. $\operatorname{def}(L_0) = 1$, 并且当 $\theta \in \mathbb{C}$ 时, L_θ 是 J-自伴微分算子, 即 $L_\theta = JL_\theta^*J$.

下面假设 $p(x)$ 是复值函数, 并且 $\mathrm{e}^{\varepsilon x}p(x) \in L[0,\infty)$, L_θ 的点谱、连续谱和剩余谱分别记作 $\sigma_p(L_\theta)$, $\sigma_c(L_\theta)$ 和 $\sigma_r(L_\theta)$. 若 L_θ 是一个 J-自伴微分算子, 则 $\sigma(L_\theta) = \sigma_p(L_\theta) \cup \sigma_c(L_\theta)$, $\sigma_r(L_\theta) = \varnothing$.

定理 7.3.1　在正实轴 $\mathbb{R}^+$ 上, L_θ 没有特征值, 即

$$\sigma_p(L_\theta) \cap \mathbb{R}^+ = \varnothing.$$

证明　当 $\lambda = s^2 \in \mathbb{R}$ 且 $s > 0$ 时, 根据定理 7.2.6 和定理 7.2.8, 对方程

$$l(y) = \lambda y \tag{7.3.1}$$

的两个线性独立解 $y_1(x,s)$, $y_3(x,s)$ 有

$$|y_1(x,s)|^2 \to 1, \quad |y_3(x,s)|^2 \to 1, \quad x \to +\infty, \tag{7.3.2}$$

所以, $y_1(x,s), y_3(x,s) \notin L^2[0,\infty)$. 由定理 7.2.9 知, $W(y_1,y_3) = -2\mathrm{i}s$. 由于 $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 构成方程 (7.3.1) 的基础解系, 所以方程 (7.3.1) 的任何解均是 $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 的线性组合.

设

$$y = c_1y_1 + c_2y_3, \tag{7.3.3}$$

是方程 (7.3.1) 的某一个解, 其中 c_1, c_2 不全为零. 不妨设 $c_1 \neq 0$, 可取 $c_1 = 1$, 于是 $y = y_1 + cy_3$. 若 $|c| > 1$, 则 $|y| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} + c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx} + o(1)| \geqslant |c| - 1 + o(1)$, 所以 $y \notin L^2[0,\infty)$. 同样当 $|c| < 1$ 时, 也有 $y \notin L^2[0,\infty)$. 故 $|c| = 1$, 设 $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, 则

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + o(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(sx-\frac{\alpha}{2})} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(sx-\frac{\alpha}{2})} + o(1)] \\ &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(xs - \frac{\alpha}{2}\right) + o(1)\right], \end{aligned}$$

所以, $|y|^2 = 4\left[\cos^2\left(sx - \dfrac{\alpha}{2}\right) + o(1)\right]$.

令 Δ_k 表示实轴上的区间 $\left(\dfrac{1}{s}\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right), \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$, 则当 $x \in$

Δ_k 时, $\cos^2\left(sx-\frac{\alpha}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}$. 取充分大的 k,x, 使得 $|o(1)|<\frac{1}{4}$, 则有 $\cos^2\left(sx-\frac{\alpha}{2}\right)+o(1)>\frac{1}{4}$. 从而, $\int_{\Delta_k}|y|^2\mathrm{d}x>\frac{\pi}{2}$. 故 $\int_0^\infty|y|^2\mathrm{d}x$ 是发散的, 即 $y\notin L^2[0,\infty)$. □

若 $\lambda=s^2\notin\mathbb{R}^+$, 不妨设 $s\in\mathbb{C}^+$, 即 $\tau=\Im s>0$. 在此情形下, 根据定理 7.2.6 和定理 7.2.7 知, 对充分大的 $\tau>0$, $|y_1|^2=\mathrm{e}^{-2\tau x}[1+o(1)]$, $|y_2|^2=\mathrm{e}^{2\tau x}[1+o(1)]$, 所以, $y_1(x,s)\in L^2[0,\infty)$, 但是 $y_2(x,s)\notin L^2[0,\infty)$. 由定理 7.2.8 知, $W(y_1,y_2)=2\mathrm{i}s$. 由于 y_1,y_2 是方程 (7.3.1) 的线性独立解. 所以, 方程 (7.3.1) 的任何解 y 均是 y_1,y_2 的线性组合. 设

$$y(x,s)=c_1y_1(x,s)+c_2y_2(x,s) \tag{7.3.4}$$

是方程 (7.3.1) 的解, 若要属于 $L^2[0,\infty)$, 则需要满足 $c_2=0$, 即 $y(x,s)=c_1y_1(x,s)$. 不妨设 $c_1=1$, 则 $y(x,s)=y_1(x,s)$. λ 是 L_θ 的特征值的充分必要条件是 $y_1\in D_\theta$, 即

$$y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)=0. \tag{7.3.5}$$

由 $y_1(x,s)$ 关于 s 的解析性质可得下述定理.

定理 7.3.2 L_θ 的特征值恰好是方程 (7.3.5) 的零点, 其中, $\lambda=s^2$ 且 $\Im s>0$. 所以, L_θ 的特征值形成了一个有限集或可列集. 若是可列集则其聚点仅可能在正实轴上.

根据估计式 (7.2.28) 和式 (7.2.29), 对充分大的 s 有

$$y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)=\mathrm{i}s\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]-\theta\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=\mathrm{i}s\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]\neq 0,$$

因此, 当 $|s|$ 充分大时, $\lambda=s^2$ 不是特征值, 即有下述定理.

定理 7.3.3 L_θ 的特征值形成一个有界集, 即 $\sigma_p(L_\theta)$ 为有界集.

7.3.2 L_θ 的预解算子及 L_θ 的谱

设 $\lambda=s^2$ ($\Im\lambda>0$) 不是算子 L_θ 的特征值, 则预解算子 $R_\lambda=(L_\theta-\lambda I)^{-1}$ 存在. 设 $f\in D(R_\lambda)$, 则存在 $y\in L^2[0,\infty)$, 使得

$$R_\lambda f=y,\quad y\in D(L_\theta),$$

即

$$L_\theta y-\lambda y=f,$$

从而

$$\begin{cases} l(y) - \lambda y = f, \\ y'(0) - \theta y(0) = 0. \end{cases} \tag{7.3.6}$$

利用常数变易法得到边值问题 (7.3.6) 的解 $y \in L^2[0,\infty)$

$$y = c_1 y_1(x,s) + c_2 y_2(x,s) - \frac{1}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) \int_0^a y_2(\xi,s) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\mathrm{i}s} y_2(x,s) \int_0^a y_1(\xi,s) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.3.7}$$

其中, $y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$ 是方程 $l(y) - \lambda y = 0$ 的线性独立解, 分别满足定理 7.2.3 和定理 7.2.4 中形式 (7.2.14) 和积分方程 (7.2.15). 根据定理 7.2.6 和定理 7.2.7 有 $W(y_1, y_2) = -2\mathrm{i}s$, 而且 $y_1 \in L^2[0,\infty)$, $y_2 \notin L^2[0,\infty)$, 由 $y_1, y \in L^2[0,\infty)$ 及边条件 $y'(0) + \theta y(0) = 0$ 得

$$c_2 = -\frac{1}{2\mathrm{i}s} \int_0^\infty y_1(\xi,s) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$c_1 = -\frac{y_2'(0,s) - \theta y_2(0,s)}{y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)} c_2.$$

令

$$\psi(s) = \frac{y_2'(0,s) - \theta y_2(0,s)}{y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)}, \tag{7.3.8}$$

则

$$c_1 = \frac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s} \int_0^\infty y_1(\xi,s) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

把 c_1, c_2 代入到式 (7.3.7) 得

$$R_\lambda f = y = \int_0^\infty k(x,\xi,\lambda) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.3.9}$$

其中,

$$k(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) y_1(\xi,s) - \dfrac{1}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) y_2(\xi,s), & 0 \leqslant \xi < x, \\ \dfrac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) y_1(\xi,s) - \dfrac{1}{2\mathrm{i}s} y_2(x,s) y_1(\xi,s), & x < \xi \leqslant \infty. \end{cases} \tag{7.3.10}$$

令

$$k_1(x,\xi,\lambda) = \frac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) y_1(\xi,s), \tag{7.3.11}$$

$$k_2(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) y_2(\xi,s), & 0 \leqslant \xi < x, \\ -\dfrac{1}{2\mathrm{i}s} y_2(x,s) y_2(\xi,s), & x < \xi \leqslant \infty, \end{cases} \tag{7.3.12}$$

则 $k(x,\xi,\lambda)=k_1(x,\xi,\lambda)+k_2(x,\xi,\lambda)$.

下面证明积分核 (7.3.10) 所确定的积分算子 R_λ 是定义在 $L^2[0,\infty)$ 上的有界算子.

由于 $y_1(x,s)\in L^2[0,\infty)$, 所以, $k_1(x,\xi,\lambda)$ 是 Hilbert-Schmidt 核, 以 $k_1(x,\xi,\lambda)$ 为核的积分算子不仅有界, 而且是全连续算子. 只需证明以 $k_2(x,\xi,\lambda)$ 为核生成的积分算子的有界性.

考虑当 $p(x)\equiv 0$ 且 $\theta=0$ 的特殊情形. 在此情形下 L_θ 是一个正定的自伴算子, 所以 L_θ 的所有谱均包含在正半轴上. 对非正半轴上的任何点 λ, 对应的预解算子 $R_\lambda=(L_\theta-\lambda I)^{-1}$ 在整个空间 $L^2[0,\infty)$ 上有界, 并且其范数 $\|R_\lambda\|\leqslant\dfrac{1}{d}$, 其中, d 是 λ 到正实轴的距离. 在此情形下, 以 $k_2(x,\xi,\lambda)$ 为核所定义的积分算子是定义在全空间 $L^2[0,\infty)$ 上的有界算子, 而且其范数不超过 $\dfrac{1}{d}+\|k_1\|$, 即 $\|k_2\|=\|k-k_1\|\leqslant\|k\|+\|k_1\|\leqslant\dfrac{1}{d}+\|k_1\|$. 此时, $y_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}$, $y_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}$, $\theta=0$, $\psi(s)\equiv-1$. 所以,

$$k_1(x,\xi,\lambda)=-\frac{1}{2\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x+\xi)},$$

$$k_2(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}, & 0\leqslant\xi<x,\\[2mm] -\dfrac{1}{2\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}, & x<\xi\leqslant\infty.\end{cases}$$

当 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau,\ \tau>0$ 时,

$$\begin{aligned}\|k_1\|^2&\leqslant\int_0^\infty\int_0^\infty|k_1(x,\xi,\lambda)|^2\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{4|s|^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\mathrm{e}^{-2\tau(x+\xi)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\xi=\frac{1}{4|s|^2}\ \frac{1}{4\tau^2},\end{aligned}$$

所以, $\|k_1\|\leqslant\dfrac{1}{4\tau|s|}$, $\|k_2\|\leqslant\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{4\tau|s|}$.

因此, 对 $\forall f\in L^2[0,\infty)$,

$$\int_0^\infty\left|\int_0^\infty k_2(x,\xi,\lambda)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right|^2\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{4\tau|s|}\right)^2\int_0^\infty|f(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi. \tag{7.3.13}$$

取 $s=\mathrm{i}\tau,\ \ \tau>0$, 则 $\lambda=s^2=-\tau^2$, 于是得

$$k_2(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\tau(x-\xi)}, & 0<\xi<x,\\[2mm] \dfrac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\tau(\xi-x)}, & x<\xi<\infty,\end{cases}$$

并且 $\frac{1}{d}+\frac{1}{4\tau|s|}=\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{4\tau^2}=\frac{5}{4\tau^2}$, 故式 (7.3.13) 可化为

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty k_2(x,\xi,\lambda)|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{25}{16\tau^4}\int_0^\infty|f(x)|^2\mathrm{d}x,$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\tau^2}\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^\infty\mathrm{e}^{-\tau\xi}|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{25}{16\tau^4}\int_0^\infty|f(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^\infty\mathrm{e}^{-\tau\xi}|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{25}{4\tau^2}\int_0^\infty|f(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{7.3.14}$$

考虑一般情形. 根据定理 7.2.6 和定理 7.2.7 中关于 $y_1(x,s)$ 和 $y_2(x,s)$ 的估计, 对于 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau$ $(\tau>0)$,

$$|y_1(x,s)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\tau x},\quad |y_2(x,s)|\leqslant c\mathrm{e}^{\tau x},\tag{7.3.15}$$

其中, c 是常数. 根据 $k_2(x,\xi,\lambda)$ 的定义及式 (7.3.14) 和式 (7.3.15) 的估计有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left|\int_0^\infty k_2(x,\xi,\lambda)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right|^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty\left|\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)\int_0^x y_2(\xi,s)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_2(x,s)\int_x^\infty y_1(\xi,s)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{c^2}{4|s|^2}\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^\infty\mathrm{e}^{-\tau\xi}|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi\right]^2\mathrm{d}x\\&\leqslant c^2\frac{25}{16|s|^2\tau^2}\int_0^\infty|f(x)|^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此得到以式 (7.3.12) 为核的积分算子 k_2 是定义在 $L^2[0,\infty)$ 上的一个有界积分算子, 其范数

$$\|k_2\|\leqslant\frac{c_1}{\tau|s|},$$

其中, c_1 是常数. 由式 (7.3.11) 生成的积分算子 k_1 满足

$$\|k_1\|\leqslant\frac{c}{4|s|\tau},$$

所以,

$$\|k\| \leqslant \|k_1\| + \|k_2\| \leqslant \frac{\tilde{c}}{\tau|s|},$$

其中, $\tilde{c}$ 是常数.

由以上讨论可知, 对任意 $f(x) \in L^2[0,\infty)$, 公式 (7.3.9) 都定义一个函数 $y \in L^2[0,\infty)$, $y(x)$ 满足微分方程边值问题 (7.3.6), 即 $y(x) \in D_\theta$, 且 $L_\theta y - \lambda y = f$. 由此得到 $L_\theta - \lambda I$ 的值域 (即 R_λ 的定义域) 是全空间 $L^2[0,\infty)$, 预解算子 R_λ 与以 $k(x,\xi,\lambda)$ 为核的积分算子是相同的. 所以, 若 $\lambda = s^2$ $(\Im s > 0)$ 不是 L_θ 的特征值, 则 $\lambda \notin \sigma(L_\theta)$. 于是得如下结论.

定理 7.3.4 在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 上, $\sigma(L_\theta)$ 是算子 L_θ 的谱集, 集合 $B = \sigma(L_\theta) \cap (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+)$ 是一个有界集, 包含至多有限个或可列个特征值, 且可列个特征值的聚点一定在 $\mathbb{R}^+$ 上. $\forall\lambda \in \mathbb{C}\backslash(B \cup \mathbb{R}^+)$, 预解算子 R_λ 存在, 并且是一个以式 (7.3.10) 为核的有界积分算子, 其中, 核 $k(x,\xi,\lambda)$ 满足

$$\int_0^\infty |k(x,\xi,\lambda)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty, \quad \int_0^\infty |k(x,\xi,\lambda)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

定理 7.3.5 算子 L_θ 是一个闭算子.

证明 若 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, 并且 λ 不是 L_θ 的特征值, 则 $R_\lambda = (L_\theta - \lambda I)^{-1}$ 在 $L^2[0,\infty)$ 上是一个有界算子, 而且, R_λ 是闭算子. 而 $R_\lambda^{-1} = L_\theta - \lambda I$, 所以, L_θ 也是闭算子. □

引理 7.3.6 对于任意 $y \in D_M$, 当 $x \to +\infty$ 时

$$y(x) \to 0, \quad y'(x) \to 0.$$

证明 $\forall y \in D_M$, 存在 θ, 使得 $y \in D_\theta$(θ 可能有限, 也可能无限). 假设 $y \in D_\theta$, 令

$$f(x) = (L_\theta - \lambda I)y,$$

其中, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \sigma(L_\theta)$. 则根据式 (7.3.9) 得

$$\begin{aligned} y(x) = &\frac{\psi(x)}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) \int_0^\infty f(\xi) y_1(\xi,s) \, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\mathrm{i}s} y_1(x,s) \int_0^x f(\xi) y_2(\xi,s) \, \mathrm{d}\xi \\ &+ \frac{1}{2\mathrm{i}s} y_2(x,s) \int_x^\infty f(\xi) y_1(\xi,s) \, \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

$$\begin{aligned} y'(x) = &\frac{\psi(x)}{2\mathrm{i}s} y_1'(x,s) \int_0^\infty f(\xi) y_1(\xi,s) \, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\mathrm{i}s} y_1'(x,s) \int_0^x f(\xi) y_2(\xi,s) \, \mathrm{d}\xi \\ &- \frac{1}{2\mathrm{i}s} y_2'(x,s) \int_x^\infty f(\xi) y_1(\xi,x) \, \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

其中, $s^2=\lambda$, $\Im\, s>0$.

又由定理 7.2.6, 当 $x\to+\infty$ 时, $y_1(x,s)\to 0$, $y_1'(x,s)\to 0$, 所以, 当 $x\to+\infty$ 时, 等式 (7.3.16) 和等式 (7.3.17) 右边第一项均收敛到 0. 利用定理 7.2.7 中对 $y_2(x,s)$ 和 $y_2'(x,s)$ 的估计及定理 7.2.6 中对 $y_1(x,s)$ 的估计式 (7.2.17) 就可得到等式 (7.3.16) 和等式 (7.3.17) 最后一项的估计, 它们都不超过 $ce^{\tau x}\displaystyle\int_x^{\infty}|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi$, 其中, c 是常数, $\tau=\Im s>0$. 而

$$\left(\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^{\infty}|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)^2\leqslant \mathrm{e}^{2\tau\xi}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-2\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\int_x^{\infty}|f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{1}{2\tau}\int_x^{\infty}|f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi. \tag{7.3.18}$$

由于 $f(\xi)\in L^2[0,\infty)$, 所以当 $x\to+\infty$ 时, (7.3.18) 左端收敛于 0. 因此, 当 $x\to+\infty$ 时, 等式 (7.3.16) 和等式 (7.3.17) 的最后一项均收敛于 0. 下面考察等式 (7.3.16) 和等式 (7.3.17) 右端的第二项. 同样利用定理 7.2.6 中对 $y_1(x,s)$ 和 $y_1'(x,s)$ 的估计及定理 7.2.7 中对 $y_2(x,s)$ 的估计式可以得到等式 (7.3.16) 和等式 (7.3.17) 第二项均不超过

$$c\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x \mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi=c\left(\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{-\tau x}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right),$$

其中, c 是常数, $\tau=\Im s>0$. 而当 $x\to+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi&=\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\tau\xi-\frac{1}{4}\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant \mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{\frac{5}{8}\tau x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{8}\tau x}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{8}\tau x}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\to 0,\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{-\tau x}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{e}^{\tau\xi}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right)^2&\leqslant \mathrm{e}^{-2\tau x}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{e}^{2\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\int_{\frac{x}{2}}^{x}|f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\tau}(1-\mathrm{e}^{-\tau x})\int_{\frac{x}{2}}^{x}|f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\frac{1}{2\tau}\int_{\frac{x}{2}}^{x}|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\to 0,\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

由式 (7.3.19) 和式 (7.3.20) 的估计式可知, 当 $x\to+\infty$ 时, 等式 (7.3.16) 和等式 (7.3.17) 中的第二项均收敛于 0. 综上可得 $y_1(x,s)\to 0$, $y_1'(x,s)\to 0$. □

对于任意 $y \in D_M$, $z \in D_M^+$, 都有

$$\int_0^\infty [l(y)\overline{z} - y\overline{l^+(z)}]\mathrm{d}x = [y\overline{z}' - y'\overline{z}]_0^\infty. \tag{7.3.21}$$

定理 7.3.7

$$L_\theta^* = L_\theta^+.$$

证明 对于任意的 $y \in D_\theta$, $z \in D_\theta^+$, $[y\overline{z}' - y'\overline{z}](0) = 0$, 所以,

$$\int_0^\infty (l(y)\overline{z} - y\overline{l^+(z)})\mathrm{d}x = [y\overline{z}' - y'\overline{z}](0) = 0,$$

即 $(L_\theta y, z) = (y, L_\theta^+ z)$, 从而 $L_\theta^+ \subset L_\theta^*$.

对 $\forall z \in D_{L_\theta^*}$, 令 $L_\theta^* z = g$. 由于 $L_\theta^* \subset L_M^+$, 所以, $z \in D_M^+$, 且 $g = L_\theta^* z = L_M^+ z$.

另外, 由共轭算子的定义, 对所有的 $y \in D_\theta$ $(y'(0) - \theta y(0) = 0)$,

$$(L_\theta y, z) = (y, g) = (y, L_M^+ z).$$

根据式 (7.3.21) 得 $[y\overline{z}' - y'\overline{z}](0) = 0$, 从而有 $y(0)[\overline{z}'(0) - \theta\overline{z}(0)] = 0$.

由 y 的任意性及 D_θ 在 $L^2[0,\infty)$ 中的稠密性可得 $z'(0) - \overline{\theta}z(0) = 0$, 所以, $z \in D_\theta^+$, 即有 $L_\theta^* \subset L_\theta^+$. 定理得证. □

定理 7.3.8 设 Q 是复平面上由不等式

$$0 < \alpha \leqslant \Re s \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant \Im s \leqslant \gamma \tag{7.3.22}$$

所定义的矩形, 则

$$\|R_\lambda\| \geqslant \frac{c}{\tau}, \tag{7.3.23}$$

其中, c 是某一常数, $\lambda = s^2$, $s \in Q$, $\tau = \Im s > 0$, R_λ 是算子 $L_\theta - \lambda I$ 的逆算子.

证明 定义 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant a, \\ \overline{y_2(x,s)} - \overline{y_1(x,s)}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^a \overline{y_2(\xi,s)}\,y_1(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_0^a |y_1(\xi,s)|^2\,\mathrm{d}\xi}, & x < a, \end{cases} \tag{7.3.24}$$

其中, a 是充分大的一个数. 由 $y_1(x,s), y_2(x,s)$ 线性无关性可知 $f(x) \neq 0$. 显然有 $f \in L^2[0,\infty)$, 且

$$\int_0^a f(x) y_1(x,s)\mathrm{d}x = 0, \tag{7.3.25}$$

$$\int_0^a f(x) y_2(x,s)\mathrm{d}x = \int_0^a |f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{7.3.26}$$

由式 (7.3.9) 可知, 对于 $R_\lambda f(x)=(L_\theta-\lambda I)^{-1}f(x)$, 利用式 (7.3.25) 和式 (7.3.26) 得

$$\begin{aligned}R_\lambda f&=\int_0^a\left[\frac{\psi(x)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_1(\xi,s)-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_2(\xi,s)\right]f(\xi)\ \mathrm{d}\xi\\&=-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)\int_0^a y_2(\xi,s)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi=-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)\int_0^a|f(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以,

$$\|R_\lambda f\|^2=\int_0^\infty|R_\lambda f|^2\mathrm{d}x>\int_a^\infty|R_\lambda f|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4|s|^2}\left(\int_0^a|f|^2\mathrm{d}x\right)^2\int_a^\infty|y_1|^2\mathrm{d}x,$$

即有

$$\|R_\lambda\|^2>\frac{1}{4|s|^2}\int_0^a|f|^2\mathrm{d}x\int_a^\infty|y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x.$$

根据定理 7.2.6 的估计, 当 $x\to+\infty$ 时, $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)]$ 关于 s ($|s|\geqslant\gamma$) 一致成立. 所以, 选取充分大的 a, 使得 $\forall s\in Q$, $|o(1)|<\dfrac{1}{2}$ 一致成立. 从而得到

$$\int_a^\infty|y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x=\int_a^\infty\mathrm{e}^{-2\tau x}\ |1+o(1)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}\ \frac{\mathrm{e}^{-2\tau a}}{2\tau}.\tag{7.3.27}$$

又因为 $y_1(x,s),y_2(x,s)$ 线性无关, 所以, 对 $\forall s\in Q$, $\displaystyle\int_0^a|f(x)|^2\mathrm{d}x$ 是在 Q 上关于 s 的连续函数, 而且在 Q 的任何一点均不为零, 从而积分 $\displaystyle\int_0^a|f(x)|^2\mathrm{d}x$ 是大于零且有界的. 故

$$\|R_\lambda\|^2>\frac{c_1}{4|s|^2}\ \frac{\mathrm{e}^{-2\tau a}}{8\tau}=\frac{c_1\mathrm{e}^{-2\tau a}}{32\tau|s|^2},$$

即有 $\|R_\lambda\|\geqslant\dfrac{c}{\tau}$. □

定理 7.3.9 实轴上任意的 $\lambda\geqslant0$ 均是算子 L_θ 的谱点.

证明 由定理 7.3.8 中式 (7.3.23) 可知, 当 λ 无限接近 λ_0 ($\geqslant0$) 时, R_λ 是一个无界算子, 即得结论. □

定理 7.3.10 在实轴上任意 $\lambda>0$, 都有 $\lambda\in\sigma_c(L_\theta)$.

证明 证法一: 根据定理 7.3.1 知, L_θ 在正实轴 $\mathbb{R}^+$ 上没有特征值. 另外根据定理 7.3.9, $\mathbb{R}^+\subset\sigma(L_\theta)$, 所以 $\mathbb{R}^+\subset\sigma_c(L_\theta)\cup\sigma_r(L_\theta)$. 由于 L_θ 是 J-自伴算子, $\sigma_r(L_\theta)=\varnothing$, 所以 $\mathbb{R}^+\subset\sigma_c(L_\theta)$.

证法二: $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$, R_λ 是无界算子, 故只需证明 $D(R_\lambda)=R(L_\theta-\lambda I)$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中稠密即可. 若不然, 存在 $f\in L^2[0,\infty)$, 使得 $\forall y\in D_\theta$, 都有 $(L_\theta y-\lambda y,f)=0$, 即 $(L_\theta y,f)=(y,\lambda f)$, 这说明 $f\in D(L_\theta^*)$, 且 $L_\theta^*f=\lambda f$, 也就是说 $f\in D_\theta^+$, $L_\theta^+f=\lambda f$, 从而 λ 是由 L^+ 生成的算子的特征值. 与定理 7.3.1 矛盾. 所以, 假设不成立, 即 $D(R_\lambda)$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中稠密. 因此, $\lambda\in\sigma_c(L_\theta)$. □

7.3.3 特殊情形

本小节研究 $p(x)$ 的虚部的符号和 θ 的虚部确定的情形下 L_θ 的谱的特性.

设 $\lambda = s^2(s=\sigma+\mathrm{i}\tau,\ \tau>0)$ 和 $y(x)$ 分别是 L_θ 的特征值和对应的特征函数, $y(x)\in L^2(0,\infty)$, 则 $y(x)=cy_1(x,s)$, 根据定理 7.2.6, 当 $x\to+\infty$ 时,

$$y(x)=cy_1(x,s)=c\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)],\quad y'(x)=\mathrm{i}sc\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)],$$

其中, c 是常数.

由于 $y(x)$ 满足 $L_\theta y=\lambda y$, 所以, $l(y)=\lambda y$, $y'(0)=\theta y(0)$. 设 $\lambda=\lambda_1+\mathrm{i}\lambda_2$, $\theta=\theta_1+\mathrm{i}\theta_2$, $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, 其中, $\lambda_1,\lambda_2,\theta_1,\theta_2$ 均为实数, $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 为定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数. 从而

$$\int_a^b(l(y)\overline{y}-y\overline{l(y)})\mathrm{d}x=(\lambda-\overline{\lambda})\int_a^b|y|^2\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\lambda_2\int_a^b|y|^2\mathrm{d}x.$$

另外,

$$\int_0^\beta l(y)\ \overline{y}\mathrm{d}x=-y'\overline{y}\Big|_0^\beta+\int_0^\beta|y'|^2\mathrm{d}x+\int_0^\beta p|y|^2\mathrm{d}x. \tag{7.3.28}$$

由于 $l(y)\in L^2(0,\infty)$, $y\in L^2(0,\infty)$, 所以, 当 $\beta\to\infty$ 时, 式 (7.3.28) 左端极限存在. 再根据 $y(x)$ 的估计式 $y'(\beta)\to 0$, $y(\beta)\to 0$ $(\beta\to\infty)$, 得 $y'(x)\in L^2(0,\infty)$, 且 $y(x)$ 是有界函数. 由 $p(x)$ 的可积性可得, 当 $\beta\to\infty$ 时, 式 (7.3.28) 右端极限也存在. 两端取极限得

$$\int_0^\infty l(y)\ \overline{y}\ \mathrm{d}x=\theta|y(0)|^2+\int_0^\infty|y'|^2\mathrm{d}x+\int_0^\infty p|y|^2\mathrm{d}x,$$

对上式取复共轭有

$$\int_0^\infty \overline{l(y)}\ y\mathrm{d}x=\overline{\theta}|y(0)|^2+\int_0^\infty|y'|^2\mathrm{d}x+\int_0^\infty \overline{p}|y|^2\mathrm{d}x,$$

于是,

$$\int_0^\infty(l(y)\overline{y}-\overline{l(y)}y)\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\theta_2|y(0)|^2+2\mathrm{i}\int_0^\infty p_2(x)|y|^2\mathrm{d}x,$$

所以,

$$\lambda_2\int_0^\infty|y|^2\mathrm{d}x=\theta_2|y(0)|^2+\int_0^\infty p_2(x)|y|^2\mathrm{d}x.$$

引理 7.3.11 在式 (7.1.1) 中, 若 $p_2(x)=\Im p(x)\leqslant 0$, $\Im\theta\leqslant 0$, 则函数 $\phi(s)=y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)$ 在正半实轴上没有零点.

证明　若不然, $\exists s=s_0>0$, 使得 $\phi(s_0)=0$. 而当 $\beta\to\infty$ 时,

$$y'(\beta)\overline{y(\beta)}=\mathrm{i}s_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}s_0\beta}[1+o(1)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s_0\beta}[1+o(1)]=\mathrm{i}s_0[1+o(1)],$$

并且将 $l(y)=\lambda y=s_0^2y$ 代入式 (7.3.28) 得

$$s_0^2\int_0^\beta|y|^2\mathrm{d}x=-\mathrm{i}s_0[1+o(1)]+\theta|y(0)|^2+\int_0^\beta|y'|^2\mathrm{d}x+\int_0^\beta p|y|^2\mathrm{d}x,$$

取复共轭

$$s_0^2\int_0^\beta|y|^2\mathrm{d}x=\mathrm{i}s_0[1+o(1)]+\overline{\theta}|y(0)|^2+\int_0^\beta|y'|^2\mathrm{d}x+\int_0^\beta \overline{p}|y|^2\mathrm{d}x,$$

以上两式相减得

$$0=-s_0[1+o(1)]+\theta_2|y(0)|^2+\int_0^\beta p_2|y|^2\mathrm{d}x,\tag{7.3.29}$$

其中, $\theta_2=\Im\theta$, $p_2(x)=\Im p(x)$. 当 β 充分大时, 式 (7.3.29) 右边值为负值, 矛盾. 引理得证. □

定理 7.3.12　若 $\theta_2=\Im\theta\leqslant0$, $p_2(x)=\Im p(x)\leqslant0$, $(x\in[0,\infty))$, 则算子 L_θ 的特征值在下半平面上. 若 L_θ 的特征值在负半实轴上, 则 $\Im p(x)\equiv0$, $\Im\theta=0$, 从而 L_θ 是一个自伴算子. 在此情形下, 所有的特征值均在负半实轴上, 且只有 $\lambda=0$ 可能是 L_θ 特征值的聚点.

证明　若 $\lambda=\lambda_1+\mathrm{i}\lambda_2$ 是 L_θ 的特征值, 记 $\theta=\theta_1+\mathrm{i}\theta_2$, $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, 则

$$\int_0^\infty(L_\theta(y)\overline{y}-yL_\theta^+(y))\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\theta_2\ |y(0)|^2+2\mathrm{i}\int_0^\infty p_2(x)\ |y|^2\mathrm{d}x,$$

从而

$$\lambda_2\int_0^\infty|y|^2\mathrm{d}x=\theta_2\ |y(0)|^2+\int_0^\infty p_2(x)\ |y|^2\mathrm{d}x.\tag{7.3.30}$$

根据定理条件可知式 (7.3.30) 右端小于等于零. 所以, 有 $\lambda_2=\Im\lambda\leqslant0$, 特征值在下半平面.

$\lambda_2=0$ 只有在 $\theta_2\ |y(0)|^2=0$ 且 $p_2(x)\ |y|^2$ 在 $[0,\infty)$ 上几乎处处为 0 时才能成立. 又由于 $y(x)$ 是 $l(y)=\lambda y$ 的非零解, $y(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上不恒等于零, 所以, 只有在 $[0,\infty)$ 上几乎处处 $p_2(x)=\Im p(x)=0$ 才成立. 于是 $l(y)$ 是一个对称微分算式.

又由 $\theta_2\ |y(0)|^2=0$ 可得 $\theta_2=0$ 或 $y(0)=0$. 若 $y(0)=0$, 且 $y\in D_\theta$, 则 $y'(0)=\theta y(0)=0$, 又 $y(x)$ 是二阶方程 $l(y)=\lambda y$ 的解, 从而 $y(0)\equiv0$, 与 y 非零矛盾. 故只能有 $\Im\theta=\theta_2=0$, 即 $\theta\in\mathbb{R}$.

综上所述, $\lambda_2=0$ 只有在 L_θ 是一个自伴算子的情形. 此时 L_θ 的谱均在实轴上, 即 $\sigma(L_\theta)\subset\mathbb{R}$, 故而 L_θ 的所有特征值也均在实轴上.

若 $\lambda = s^2$ 是 L_θ 的特征值, 则 s 是 $\phi(s) = y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)$ 的零点. 根据引理 7.3.11 知所有特征值均在负半实轴. 由 $\phi(s)$ 的连续性, $\phi(s)$ 的零点的聚点 s_0 满足 $\phi(s_0) = 0$, 再由引理 7.3.11 知 $s_0 \leqslant 0$, 故 $\phi(s)$ 的聚点只可能是 $s_0 = 0$. □

注 1 用类似的方法可以得到关于 $\Im\theta \geqslant 0$, $\Im p(x) \geqslant 0$ 时的相应结论.

注 2 同样的方法, 可以得到上述结论的推广. 若对某 $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x < \infty, \tag{7.3.31}$$

则上述结论均成立.

定理 7.3.13 若 $p(x)$ 满足条件 (7.3.31), 并且 $p(x)$ 和 θ 满足定理 7.3.12 的假设, 则微分算子 L_θ 仅有限个特征值, 且在正半实轴 $\mathbb{R}^+$ 上没有特征值, $\lambda_0 = 0$ 属于 L_θ 的连续谱.

7.4 正则边值问题

7.4.1 正则边值问题的特征值

本节主要在区间 $[0,b]$ $(0 < b < \infty)$ 上研究微分方程

$$l(y) = -y'' + p(x)y = \lambda y \tag{7.4.1}$$

及边条件

$$y'(0) = \theta y(0), \tag{7.4.2}$$

$$y'(b) = \theta_1 y(b) \tag{7.4.3}$$

所生成的边值问题 (或微分算子), 其中, $p(x)$ 是 $[0,b]$ 上定义的复值函数, 且 $\int_0^b |p(x)|\mathrm{d}x < \infty$, 或 $\int_0^b \mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x < \infty$, θ 与 θ_1 是任意复数.

令 $\lambda = s^2$, 设 $u_1(x,s)$, $u_2(x,s)$ 是方程 (7.4.1) 的两个线性无关的解, $u_1(x,s)$, $u_2(x,s)$ 在复平面上某一区域内是 s 的解析函数. 由于方程 (7.4.1) 的任一解可以表示为

$$y = c_1u_1 + c_2u_2,$$

所以, 满足边条件 (7.4.2) 和 (7.4.3) 的解 y 中的常数 c_1, c_2 满足如下方程组

$$\begin{cases} [u_1'(0,s) - \theta u_1(0,s)]c_1 + [u_2'(0,s) - \theta u_2(0,s)]c_2 = 0, \\ [u_1'(b,s) - \theta_1 u_1(b,s)]c_1 + [u_2'(b,s) - \theta_1 u_2(b,s)]c_2 = 0. \end{cases}$$

由此, c_1, c_2 是一组不全为零的常数的充分必要条件是

$$W(s)=\begin{vmatrix} u_1'(0,s)-\theta u_1(0,s) & u_2'(0,s)-\theta u_2(0,s) \\ u_1'(b,s)-\theta_1 u_1(b,s) & u_2'(b,s)-\theta_1 u_2(b,s) \end{vmatrix}=0. \tag{7.4.4}$$

由上述讨论可知, $\lambda=s^2$ 是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的特征值的充分必要条件是 $W(s)=0$. 若 $W(s)$ 的零点为 $s_1(b),s_2(b),\cdots,s_n(b),\cdots$, 则 $\lambda_n(b)=s_n^2(b)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的特征值, 对应的解 $y_n=c_1u_1(x,s_n(b))+c_2u_2(x,s_n(b))$ 是特征值 $\lambda_n(b)$ 所对应的特征函数.

我们仍然假设 $y_1(x,s),y_2(x,s)$ 是式 (7.2.14) 和式 (7.2.15) 中所给的方程 (7.4.1) 的两个特解

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^b[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}]p(\xi)y_1(\xi,s)\mathrm{d}\xi,$$

$$y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^b[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}]p(\xi)y_2(\xi,s)\mathrm{d}\xi.$$

当 $s\neq 0$ 时, $y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)$ 与 $y_2'(0,s)-\theta y_2(0,s)$ 均不为零. 否则

$$W=\begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) \\ y_1'(0,s) & y_2'(0,s) \end{vmatrix}=0,$$

与 $y_1(x,s),y_2(x,s)$ 线性无关矛盾.

令 $c_1=1,\ c_2=-\dfrac{y_1'(b,s)-\theta_1y_1(b,s)}{y_2'(b,s)-\theta_1y_2(b,s)}$, 则

$$y=y_1(x,s)-\frac{y_1'(b,s)-\theta_1y_1(b,s)}{y_2'(b,s)-\theta_1y_2(b,s)}y_2(x,s). \tag{7.4.5}$$

当 $s=s_n(b)$ 时, 它满足边条件 (7.4.2) 和 (7.4.3). 所以, $y_n=y(x,s_n(b))$ 是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 对应于特征值 $\lambda_n=s_n(b)^2$ 的特征函数.

用 $y_3(x,s)$ 代替 $y_2(x,s)$, 令

$$\tilde{y}(x,s)=[y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s)]\,y_1(x,s)-[y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)]\,y_3(x,s),$$

则 $\tilde{y}(x,s)$ 满足边条件 (7.4.2). 如果方程

$$\tilde{y}'(b,s)-\theta_1\tilde{y}(b,s)=0$$

的根为 $s_1(b),s_2(b),\cdots,s_n(b),\cdots$, 则 $\lambda_n=s_n^2(b)$ $(n=1,2,\cdots)$ 就是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的特征值, 对应的 $\tilde{y}_n(x)=\tilde{y}(x,s_n)$ 是特征函数.

对应于不同特征值的特征函数是 J-正交的, 即若 λ_m,λ_n 对应的特征函数分别为 y_m,y_n, 则

$$[y_m, y_n] = (y_m, Jy_n) = \int_0^b y_m y_n \mathrm{d}x = 0.$$

事实上,

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^b y_m y_n \mathrm{d}x = \int_0^b y_m l(y_n) \mathrm{d}x - \int_0^b l(y_m) y_n \mathrm{d}x = [y_m y_n' - y_m' y_n]_0^b,$$

而 $y_m(x), y_n(x)$ 满足边条件 (7.4.2) 和 (7.4.3), 所以 $(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^b y_m y_n \mathrm{d}x = 0$, 又 $\lambda_m \neq \lambda_n$, 故 $\int_0^b y_m y_n \mathrm{d}x = 0$.

当边条件 (7.4.3) 用

$$y(b) = 0$$

代替, 即 $\theta_1 = \infty$ 时, 边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的特征值满足

$$\begin{vmatrix} u_1'(0,s) - \theta u_1(0,s) & u_2'(0,s) - \theta u_2(0,s) \\ u_1(b,s) & u_2(b,s) \end{vmatrix} = 0,$$

对应于特征值 $\lambda = s^2$ 的特征函数具有如下形式:

$$y(x,s) = y_1(x,s) - \frac{y_1(b,s)}{y_2(b,s)} y_2(x,s). \tag{7.4.6}$$

7.4.2 边值问题特征值的渐近表示

首先考虑当 b 固定, 而 $s \to \infty$ 时, 边值问题的特征值的渐近表示.

引理 7.4.1 设边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的特征值 $\lambda = s^2$, 则当 $s \to \infty$ 时, 关于 b $(0 < b < \infty)$ 一致满足渐近表示

$$s = \frac{n\pi}{b} + \frac{1}{b} O\left(\frac{1}{s}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

证明 根据定理 7.2.11 和定理 7.2.12 得, 当 $\Im s > 0$ 且 $s \to \infty$ 时,

$$y_1(x,s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \quad y_1'(x,s) = \mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$

$$y_2(x,s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \quad y_2'(x,s) = -\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$

关于 b $(0 < b < \infty)$ 一致成立. 由此得, 当 $\Im s > 0$ 且 $s \to \infty$ 时,

$$y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s) = \mathrm{i}s\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$

$$y_2'(0,s)-\theta y_2(0,s)=-\mathrm{i}s\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$
$$y_1'(b,s)-\theta_1 y_1(b,s)=\mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$
$$y_2'(b,s)-\theta_1 y_2(b,s)=-\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right],$$

关于 b $(0<b<\infty)$ 一致成立. 在式 (7.4.4) 中令 $u_1=y_1$, $u_2=y_2$, 则 λ 是边值问题的特征值的充分必要条件是 $\lambda=s^2$ 满足式 (7.4.4), 即

$$s^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]-s^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0,$$

所以,

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}=1+O\left(\frac{1}{s}\right),$$

关于 b $(0<b<\infty)$ 一致成立. 从而,

$$2\mathrm{i}sb=2\pi n\mathrm{i}+\ln\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=2\pi n\mathrm{i}+O\left(\frac{1}{s}\right),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

故

$$s=\frac{n\pi}{b}+\frac{1}{b}O\left(\frac{1}{s}\right),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$ □

推论 7.4.2　对于任意正数 δ 和 b_0, 存在 $R>0$, 使得若 $b>b_0$, 则边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 不存在特征值 $\lambda=s^2$ 满足 $\Im s>\delta$ 且 $|s|\geqslant R$.

证明　由以上结论可知 $\Im s=\frac{1}{b}\,\Im O\left(\frac{1}{s}\right)$. 对 $b\geqslant b_0$, 有 $\Im s\leqslant\frac{1}{b_0}\left|\Im O\left(\frac{1}{s}\right)\right|=O\left(\frac{1}{s}\right)$. 所以, 存在充分大的 R, 当 $|s|>R$, $b\geqslant b_0$ 时, 必有 $|\Im s|<\delta$. 故对 $b\geqslant b_0$, 不存在特征值 $\lambda=s^2$ 使得 $|s|\geqslant R$ 且 $\Im s>\delta$. □

推论 7.4.3　对 $\varepsilon>0$, 设 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 则存在 N (不依赖于 $b\geqslant b_0$), 使得对满足条件 $|\frac{n\pi}{b}|\geqslant N$ 的每个整数 n, 都存在一个对应的特征值 $\lambda_n=s_n^2$,

$$s_n=\frac{n\pi}{b}+\frac{1}{b}O\left(\frac{1}{s_n}\right).$$

然后, 再研究 $b\to+\infty$ 时, 边值问题的特征值的渐近表示.

定理 7.4.4　固定 $\varepsilon>0$, 使 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 固定 $\varepsilon_1>0$, 则当 $b\to+\infty$

时, 边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 满足条件:

(1) θ_1 有限时, $\lambda = s^2$, $\Im s \geqslant \varepsilon$, $|s - \mathrm{i}\theta_1| > \varepsilon_1$,

(2) $\theta_1 = \infty$ 时, $\lambda = s^2$, $\Im s \geqslant \varepsilon$

的特征值的极限是算子 L_θ 的特征值.

证明 根据定理 7.2.6 和定理 7.2.7 知, 当 $b \to +\infty$ 时,

$$y_1(b,s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}[1 + o(1)], \quad y_1'(b,s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}[\mathrm{i}s + o(1)],$$

$$y_2(b,s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}[1 + o(1)], \quad y_2'(b,s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}[-\mathrm{i}s + o(1)],$$

关于 s ($\Im s \geqslant \varepsilon$) 一致成立.

对于 s, 当 $\Im s = \tau \geqslant \varepsilon$ 时, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}| = \mathrm{e}^{-\tau b} < \mathrm{e}^{-\varepsilon b} \to 0,\ b \to +\infty$. 从而

$$y_1'(b,s) - \theta y_1(b,s) = o(1), \quad b \to +\infty.$$

若 θ_1 有限, 则

$$y_2'(b,s) - \theta_1 y_2(b,s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}(-\mathrm{i}s - \theta_1 + o(1)).$$

在式 (7.4.4) 中, 令 $u_1 = y_1$, $u_2 = y_2$, 便得

$$W(s) = [y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}(-\mathrm{i}s - \theta_1 + o(1)) + o(1)[y_2'(0,s) - \theta y_2(0,s)] = 0.$$

根据推论 7.4.2, 对于充分大的 b, 当 $\Im s \geqslant \varepsilon$ 时, 边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 对应的特征值形成一个有界集, 所以, $y_2'(0,s) - \theta y_2(0,s)$ 在这个有界集上有界. 再由 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}| \to 0\ \ (b \to +\infty)$ 可知

$$y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s) = \eta = o(1) \tag{7.4.7}$$

关于 s ($\Im s \geqslant \varepsilon$) 一致成立, 其中, $\eta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}(-\mathrm{i}s + \theta_1 + o(1))^{-1}o(1) \to 0\ \ (b \to +\infty)$.

若 $\theta_1 = \infty$, 显然式 (7.4.7) 关于 s ($\Im s \geqslant \varepsilon$) 也一致成立.

设 s_0 是方程

$$y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s) = 0, \tag{7.4.8}$$

满足条件 (1) 或条件 (2) 的根. 取一条包含 s_0 的封闭曲线 Γ, 且设 Γ 的直径 $\delta' > 0$ 充分小, 使得 Γ 包含在 $\Im s > \varepsilon$ 的半平面内, Γ 内不包含方程 (7.4.8) 的其他零点.

令 $\mu = \min\limits_{s\in\Gamma} |y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)|$, 则对充分大的 b, 有 $|\eta| < \mu$. 由 Rouché定理知方程 (7.4.7) 在 Γ 内恰有 m 个根, 其中 m 是方程 (7.4.8) 的根 s_0 的重数.

由 δ' 的任意性, 当 $b \to \infty$ 时, 这些根均收敛于 s_0. 故通过方程 (7.4.8) 的根可以确定方程 (7.4.7) 的根的个数和存在范围, 结论得证. □

根据定理 7.4.4 和推论 7.4.2 可知 L_θ 的特征值不会收敛到正半实轴上. 下面考虑可以收敛到正半实轴上的边界问题. 如果边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 中的系数 $p(x)$, θ, 和 θ_1 满足如下基本假设:

(1) 对 $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x < \infty$;

(2) 当 $s \geqslant 0$ 时, 函数 $A(s) = y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)$ 和 $\tilde{A}(s) = y_3'(0,s) - \theta y_3(0,s)$ 均不为零;

(3) $\theta_1 = \infty$ 或者 $\Re\theta_1 \neq 0$.

令

$$\Psi(s) = \begin{cases} -\dfrac{y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)}{y_3'(0,s) - \theta y_3(0,s)} \cdot \dfrac{\mathrm{i}s + \theta_1}{\mathrm{i}s - \theta_1}, & \text{当 } \theta_1 \text{ 有限时}, \\ \dfrac{y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)}{y_3'(0,s) - \theta y_3(0,s)}, & \text{当 } \theta_1 = \infty \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $\Psi(s)$ 在 $0 \leqslant s < \infty$ 上是连续的且不等于零.

对充分小的 ε_1, 若 $|\Im s| \leqslant \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}\varepsilon$, $\Re s > 0$, 则根据定理 7.2.10 和定理 7.2.12, 当 $s \to \infty$ 时,

$$\Psi(s) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}s\left[1 + O\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]}{-\mathrm{i}s\left[1 + O\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]} \cdot \dfrac{\mathrm{i}s + \theta_1}{\mathrm{i}s - \theta_1} \to 1, & \text{当 } \theta_1 \text{ 有限时}, \\ \dfrac{\mathrm{i}s\left[1 + O\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]}{-\mathrm{i}s\left[1 + O\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]} \to -1, & \text{当 } \theta_1 = \infty \text{ 时}, \end{cases}$$

所以, 对充分大的 R, 函数 $\Psi(s)$ 在区域 $|\Im s| \leqslant \varepsilon_1$, $\Re s \geqslant R$ 内连续且不等于零. 另外, 函数 $y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)$, $y_3'(0,s) - \theta y_3(0,s)$, $\mathrm{i}s + \theta_1$, $\mathrm{i}s - \theta_1$ 在 $|\Im s| \leqslant \varepsilon_1$ 上连续, 且在 $0 \leqslant s < \infty$ 上不等于零. 故对于充分小的 ε_1, $\Psi(s)$ 在区域 $0 \leqslant \Re s \leqslant R$, $|\Im s| \leqslant \varepsilon_1$ 内不为零.

在上述基础上, 在带形区域 $|\Im s| < \varepsilon_1$, $\Re s \geqslant 0$ 内定义连续函数 $\omega(s) = \ln \Psi(s)$, 显然, $\omega(s)$ 在此带形区域内是有界的解析函数, 且当 θ_1 有限时, $\lim\limits_{s\to\infty} \omega(s) = 0$; 当 $\theta_1 = \infty$ 时, $\lim\limits_{s\to\infty} \omega(s) = \pi\mathrm{i}$.

定理 7.4.5 若边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 满足上述基本假设 (1)~ 假设 (3), 则对任意大的 $N > 0$, 在区域 $Q_N = \{\lambda = s^2 \in \mathbb{C} \mid |\Im s| \leqslant \varepsilon_1,\ 0 \leqslant \Re s \leqslant N\}$ 内, 边值问题的特征值有如下渐近表示:

$$s=\frac{n\pi}{b}+\frac{1}{2\mathrm{i}b}\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right)+o\left(\frac{1}{b}\right),\quad b\to+\infty. \tag{7.4.9}$$

对于充分大的 b, 在区域 $Q'=\{\lambda=s^2 \mid |\Im s|\leqslant\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\leqslant\Re s\leqslant N-\varepsilon_3,\ \varepsilon_2>0,\ \varepsilon_3>0\}$ 内的每一点 $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{b}+\dfrac{1}{2\mathrm{i}b}\omega\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)$, 恰好对应着边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 在区域 Q_N 的一个特征值 $\lambda_n=s_n^2$ 满足渐近表示 (7.4.9).

证明 利用定理 7.2.6 和定理 7.2.8 中关于 $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 的渐近估计知, 当 θ_1 有限, $b\to+\infty$ 时,

$$y_1'(b,s)-\theta_1y_1(b,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)],$$

$$y_3'(b,s)-\theta_1y_3(b,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}[-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]$$

关于 s 在 $|\Im s|\leqslant\varepsilon_1<\dfrac{1}{2}\varepsilon$ 一致成立. 在式 (7.4.4) 中, 令 $u_1=y_1,u_2=y_3$, 则有

$$\begin{aligned}W(s)=&[y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}(-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1))\\&-[y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}(\mathrm{i}s-\theta_1+o(1))=0\end{aligned}$$

对 $\lambda=s^2$ 在 $|\Im s|\leqslant\varepsilon_1<\dfrac{1}{2}\varepsilon$ 内成立. 由此得

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}=-\frac{y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)}{y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s)}\cdot\frac{\mathrm{i}s+\theta_1+o(1)}{\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)}.$$

由于 θ_1 不在虚轴上 ($\Re\theta_1\neq0$), 所以, 对充分小的 ε_1, 函数 $\dfrac{1}{\mathrm{i}s+\theta_1}$ 与 $\dfrac{1}{\mathrm{i}s-\theta_1}$ 在 $|\Im s|\leqslant\varepsilon_1$ 内是有界的. 从而

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}=-\frac{y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)}{y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s)}\cdot\frac{\mathrm{i}s+\theta_1}{\mathrm{i}s-\theta_1}[1+o(1)]=\Psi(s)[1+o(1)],$$

同理可以导出, 当 $\theta_1=\infty$ 时, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}=\Psi(s)[1+o(1)]$.

由于 $\ln[1+o(1)]=o(1)$, 所以 $2\mathrm{i}sb=\ln\Psi(s)+2n\pi\mathrm{i}+o(1)$, 即有

$$s=\frac{n\pi}{b}+\frac{1}{2\mathrm{i}b}\omega(s)+\frac{1}{2\mathrm{i}b}o(1).$$

又因为 $\omega(s)$ 关于 $s=\dfrac{n\pi}{b}+o\left(\dfrac{1}{b}\right)$ 是有界的, 在 Q_N 上一致连续, 且当 $b\to\infty$ 时,

$$\omega(s)=\omega\left(\frac{n\pi}{b}+o\left(\frac{1}{b}\right)\right)=\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right)+o(1),$$

故

$$s = \frac{n\pi}{b} + \frac{1}{2\mathrm{i}b}\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right) + \frac{1}{b}o(1).$$

设 α_{n-1}, α_n 包含在矩形区域 Q' 内, 由定义可知

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{b} + \frac{\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right) - \omega\left(\frac{(n-1)\pi}{b}\right)}{2\mathrm{i}b}.$$

由于 $\omega(s)$ 在 Q_N 内一致连续, 所以, $\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right) - \omega\left(\frac{(n-1)\pi}{b}\right) = o(1) \to 0 \ \ (b \to \infty)$, 因此,

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{b} + \frac{1}{b}o(1), \quad b \to \infty.$$

选取 b_0, 使得当 $b \geqslant b_0$ 时, $|o(1)| < \frac{\pi}{2}$, 则

$$|\alpha_n - \alpha_{n-1}| > \frac{\pi}{2b}.$$

对 $\alpha_n \in Q'$, 选取以 α_n 为圆心, 半径为 $r = \frac{\delta}{b}\left(\delta \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ 的圆 Γ_n, 且使这些 Γ_n 互不相交. 由于对充分大 b_0, 当 $b > b_0$ 时, 有 $r < \varepsilon_1$, $r < \varepsilon_2$, $r < \varepsilon_3$, 故所有圆 Γ_n 均包含在 Q_N 内.

适当选取充分大的 b_0, 使得当 $b \geqslant b_0$ 时, 式 (7.4.9) 中 $\left|o\left(\frac{1}{b}\right)\right| < \delta$, 则 $s - \alpha_n = \frac{1}{b}o(1)$. 在 Γ_n 上, $|s - \alpha_n| = r = \frac{\delta}{b}$ 且 $\left|\frac{1}{b}o(1)\right| < \frac{\delta}{b}$.

根据 Rouché定理, 在 Γ_n 内, 方程 $s - \alpha_n = \frac{1}{b}o(1)$ 与 $s - \alpha_n = 0$ 都只有一个根. 结论得证. □

7.4.3 正则边值问题的特征函数的渐近表示

假设 $p(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上可积, 即 $\int_0^\infty |p(x)|\mathrm{d}x < \infty$. 根据 7.4.1 小节的讨论, 若设 $y(x, s)$ 是方程 (7.4.1) 满足边条件 (7.4.2) 和 (7.4.3) 的一个解, 则按照 θ_1 的有限和无限分别对应式 (7.4.5) 和式 (7.4.6). 设特征值 $\lambda_n = s_n^2$ 对应的特征函数为 $y(x, s_n)$.

定理 7.4.6　设 $\lambda = s_0^2$ ($\Im s_0 > 0$) 是算子 L_θ 的一个特征值, $\lambda(b) = s^2(b)$ 是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的一个特征值, 使得当 $b \to +\infty$ 时, $s(b) \to s_0$. 则对于 $s = s(b)$,

(1) 若 θ_1 有限 ($\theta_1 \neq -\mathrm{i}s_0$), 则当 $b \to +\infty$ 时,

$$y(x,s) = y_1(x,s) + y_2(x,s)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}\left[\frac{\mathrm{i}s-\theta_1}{\mathrm{i}s+\theta_1}+o(1)\right];$$

(2) 若 $\theta_1=\infty$, 则当 $b\to+\infty$ 时,

$$y(x,s) = y_1(x,s) - y_2(x,s)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}[1+o(1)].$$

证明 根据定理 7.2.6 和定理 7.2.7 的估计, 当 θ_1 有限, $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{y_1'(b,s)-\theta_1 y_1(b,s)}{y_2'(b,s)-\theta_1 y_2(b,s)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb}[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}[-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]};$$

当 $\theta_1=\infty$, $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{y_1(b,s)}{y_2(b,s)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}[1+o(1)].$$

在 $\theta_1\neq\infty$, 且 $\theta_1\neq-\mathrm{i}s_0$ 的情形下, 当 $b\to+\infty$ 时, $-\mathrm{i}s-\theta_1\to-\mathrm{i}s_0-\theta_1\neq0$, 所以, 对充分大的 b, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sb}[-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]\neq0$, 而且 $|-\mathrm{i}s-\theta_1|$ 是有界的, 于是

$$\frac{y_1'(b,s)-\theta_1 y_1(b,s)}{y_2'(b,s)-\theta_1 y_2(b,s)} = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}\left[\frac{\mathrm{i}s-\theta_1}{\mathrm{i}s+\theta_1}+o(1)\right].$$

因此, 边值问题的解

$$\begin{aligned} y(x,s) &= y_1(x,s) - \frac{y_1'(b,s)-\theta_1 y_1(b,s)}{y_2'(b,s)-\theta_1 y_2(b,s)}y_2(x,s),\\ &= y_1(x,s) + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}\left[\frac{\mathrm{i}s-\theta_1}{\mathrm{i}s+\theta_1}+o(1)\right]y_2(x,s). \end{aligned}$$

$\theta_1=\infty$ 情形下, $b\to+\infty$ 时 $y(x,s)$ 的渐近估计式类似可得. □

引理 7.4.7 在定理 7.4.6 的基本假设下, 对于 $s=s(b)$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$y(x,s) = y_1(x,s_0) + o(1),$$

关于 x 在 $0\leqslant x\leqslant c$ $(c<\infty)$ 上一致成立.

证明 设 $U(s_0)$ 是 s_0 的一个闭的小邻域, $U(s_0)$ 内没有 L_θ 的其他的特征值, 对于充分大的 b, $s=s(b)\in U(s_0)$. 而 $y_2(x,s)$ 关于 (x,s) 在区域 $\{(x,s)\mid 0\leqslant x\leqslant c,\ s\in U(s_0)\}$ 上连续, 所以, $y_2(x,s)$ 在该区域上有界. 当 $\Im s_0>0$ 时, $s(b)\to s_0$ $(b\to+\infty)$, 故

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb} = o(1), \quad b\to+\infty.$$

另外, $y_1(x,s)$ 在区域 $\{(x,s)\mid 0\leqslant x\leqslant c,\ s\in U(s_0)\}$ 上一致连续, 且

$$y_1(x,s) = y_1(x,s_0) + o(1), \quad b\to+\infty. \tag{7.4.10}$$

综上可得, 当 $b\to+\infty$ 时, $y(x,s)=y_1(x,s_0)+o(1)$. □

定理 7.4.8　在定理 7.4.6 的基本假设下, 对 $s=s(b)$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\int_0^b y^2(x,s)\mathrm{d}x=\int_0^\infty y_1^2(x,s)\mathrm{d}x+o(1).$$

证明　首先证明当 $b\to+\infty$ 时,

$$\int_0^b |y(x,s)-y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x=o(1).$$

根据定理 7.2.7 的估计可知, 当 $x\to+\infty$ 时, $y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)]$. 选取 s_0 的邻域 $U(s_0)$, 使得 $U(s_0)$ 包含在半平面 $\Im s\geqslant\varepsilon>0$ 内, 则对于充分大的 b, 有 $\Im s(b)\geqslant\varepsilon$. 令 $s=\delta+\mathrm{i}\tau$, 则当 θ_1 有限时,

$$\begin{aligned}\int_0^b |y(x,s)-y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}sb}y_2(x,s)\left[\frac{\mathrm{i}s-\theta_1}{\mathrm{i}s+\theta_1}+o(1)\right]\right|^2\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-4\tau b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\tau x}\left(\left|\frac{\mathrm{i}s-\theta_1}{\mathrm{i}s+\theta_1}\right|^2+o(1)\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以,

$$\int_0^b |y(x,s)-y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x\leqslant C'\mathrm{e}^{-4\tau b}\frac{\mathrm{e}^{2\tau b}-1}{2\tau}\leqslant C\frac{\mathrm{e}^{-2\tau b}}{2\tau}\leqslant C\frac{\mathrm{e}^{-2\varepsilon b}}{2\varepsilon}.$$

同样, 当 $\theta_1=\infty$ 时, 上式也成立.

根据引理 7.4.7 的证明可知, 对于 $s=s(b)$, 当 $b\to+\infty$ 时, 对固定的 $c>0$,

$$\int_0^c |y_1(x,s)-y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x=o(1),\tag{7.4.11}$$

又由于 $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)]$ $(x\to+\infty)$, 所以, 可选充分大的 c, 使得对所有 $s\in U(s_0)$, $b>c$, 都有 $\int_c^b |y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon_1$. 特别地, $\int_c^b |y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon_1$. 再由式 (7.4.11), 可选取充分大的 b, 使得

$$\int_0^b |y_1(x,s)-y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon_1,$$

根据上述估计及式 (7.4.11), 对于 $s=s(b)$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\int_0^b |y_1(x,s)-y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x=o(1).\tag{7.4.12}$$

综合式 (7.4.11) 和式 (7.4.12) 便得, 对 $s=s(b)$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\int_0^b |y(x,s)-y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x=o(1).$$

利用上面估计, 对 $s=s(b)$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\left|\int_0^b y_1(x,s_0)[y(x,s)-y_1(x,s_0)]\mathrm{d}x\right|^2\leqslant\int_0^b|y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x\int_0^b|y(x,s)-y_1(x,s_0)|^2\mathrm{d}x$$
$$=o(1),$$

$$\left|\int_0^b[y(x,s)-y_1(x,s)]^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^b|y(x,s)-y_1(x,s)|^2\mathrm{d}x=o(1),$$

所以, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\int_0^b y^2(x,s)\mathrm{d}x-\int_0^b y_1^2(x,s_0)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^b[y(x,s)-y_1(x,s_0)]^2\mathrm{d}x+2\int_0^b y_1(x,s_0)\,[y(x,s)-y_1(x,s_0)]\mathrm{d}x=o(1),$$

由于 $b\to+\infty$ 时, $\displaystyle\int_b^\infty y_1^2(x,s_0)\mathrm{d}x=o(1)$, 所以,

$$\int_0^b y^2(x,s)\mathrm{d}x=\int_0^b y_1^2(x,s_0)\mathrm{d}x+o(1)=\int_0^\infty y_1^2(x,s_0)\mathrm{d}x+o(1).\qquad\square$$

当基本条件 (1) 和条件 (2) 满足时, 利用 $y_1(x,s)$ 与 $y_3(x,s)$ 构造边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 的解

$$\tilde{y}(x,s)=[y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s)]\,y_1(x,s)-[y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)]\,y_3(x,s),$$

引入函数

$$A(s)=y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s),\quad \tilde{A}(s)=y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s).$$

定理 7.4.9 设 $\tilde{\lambda}=\tilde{s}^2=\tilde{s}^2(b)$ 是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 当 $\theta_1=\infty$ 时的特征值, 使得当 $b\to+\infty$ 时, $\Im\tilde{s}\to0$, 则当 $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{1}{b}\int_a^b\tilde{y}^2(x,\tilde{s})\mathrm{d}x=-2A(\tilde{s})\tilde{A}(\tilde{s})+o(1),\tag{7.4.13}$$

关于 $\tilde{s}$ 在矩形区域 $\left\{\tilde{s}\in\mathbb{C}\mid|\Im\tilde{s}|\leqslant\varepsilon_1<\dfrac{\varepsilon}{2},\ 0\leqslant\alpha\leqslant\Re\tilde{s}\leqslant\beta\right\}$ 内一致成立.

证明 由上述定义 $\tilde{y}(x,s)=\tilde{A}(s)y_1'(x,s)-A(s)y_3(x,s)$, 及 $y_1(x,s)$ 与 $y_3(x,s)$ 的渐近估计可知, 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\tilde{y}(x,s)=\tilde{A}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)]-A(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)],$$

关于 s 在区域 $|\Im\tilde{s}|\leqslant\varepsilon_1<\dfrac{1}{2}\varepsilon$ 内一致成立, 于是

$$\frac{1}{b}\int_0^b \tilde{y}^2(x,\tilde{s})\mathrm{d}x = \tilde{A}^2(\tilde{s})\left(\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}x}\mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}x}o(1)\mathrm{d}x\right)$$
$$-2\tilde{A}(\tilde{s})A(\tilde{s})\left[\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_0^b o(1)\mathrm{d}x\right]$$
$$+A^2(\tilde{s})\left(\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}x}\mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\tilde{s}x}o(1)\mathrm{d}x\right). \quad (7.4.14)$$

显然, 当 $b\to\infty$ 时, $\frac{1}{b}\int_0^b o(1)\mathrm{d}x = o(1)$. 当 $\tilde{\tau}=\Im\tilde{s}\geqslant 0$ 时,

$$\left|\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}x}o(1)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{b}\int_0^b |o(1)|\mathrm{d}x = o(1).$$

而当 $\tilde{\tau}=\Im\tilde{s}\leqslant 0$,

$$\left|\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}x}o(1)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{-2\tilde{\tau}x}|o(1)|\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-2\tilde{\tau}b}\frac{1}{b}\int_0^b |o(1)|\mathrm{d}x.$$

又由于 $b\to+\infty$ 时, $s=\frac{n\pi}{b}+\frac{1}{2\mathrm{i}b}\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right)+o\left(\frac{1}{b}\right)$, 故 $\tilde{\tau}=\Im\tilde{s}=o\left(\frac{1}{b}\right)$, $\tilde{\tau}b=o(1)$, 这样 $\mathrm{e}^{-2\tilde{\tau}b}=o(1)$. 因此当 $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}x}o(1)\mathrm{d}x = o(1).$$

当 $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\tilde{s}x}o(1)\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\tilde{s})x}o(1)\mathrm{d}x = o(1).$$

由 $A(s)$ 和 $\tilde{A}(s)$ 的定义可知, $A(\tilde{s})$ 与 $\tilde{A}(\tilde{s})$ 在区域 $\{\tilde{s}\in\mathbb{C}\mid \alpha\leqslant\Re\tilde{s}\leqslant\beta,\ |\Im\tilde{s}|\leqslant\varepsilon\}$ 内有界. 把上面的估计代入式 (7.4.14), 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{1}{b}\int_0^b \tilde{y}^2(x,\tilde{s})\mathrm{d}x = \tilde{A}^2(\tilde{s})\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}b}-1}{2\mathrm{i}sb} + A^2(\tilde{s})\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}b}-1}{2\mathrm{i}sb} - 2\tilde{A}(\tilde{s})A(\tilde{s}) + o(1). \quad (7.4.15)$$

下面证明满足上述条件的 $\tilde{s}$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tilde{s}b}-1}{2\mathrm{i}\tilde{s}b} = o(1).$$

由于 $\tilde{s}$ 是边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 当 $\theta_1=\infty$ 时的特征值, 所以

$$\tilde{y}(b,\tilde{s}) = \tilde{A}(\tilde{s})y_1(b,\tilde{s}) - A(\tilde{s})y_3(b,\tilde{s}) = 0.$$

利用 $y_1(x,s)$ 和 $y_3(x,s)$ 在定理 7.2.3 和定理 7.2.5 中的表示形式可得

$$\tilde{A}(\tilde{s})\mathrm{e}^{ib\tilde{s}}z(b,\tilde{s}) - A(\tilde{s})\mathrm{e}^{-ib\tilde{s}}\omega(b,\tilde{s}) = 0,$$

于是

$$\mathrm{e}^{2ib\tilde{s}} = \frac{A(\tilde{s})\omega(b,\tilde{s})}{\tilde{A}(\tilde{s})z(b,\tilde{s})},$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{2ib\tilde{s}}-1}{\tilde{s}} &= \frac{1}{\tilde{s}}\frac{A(\tilde{s})\omega(b,\tilde{s}) - \tilde{A}(\tilde{s})z(b,\tilde{s})}{\tilde{A}(\tilde{s})z(b,\tilde{s})} \\ &= \frac{\dfrac{A(\tilde{s})-\tilde{A}(\tilde{s})}{\tilde{s}}\omega(b,\tilde{s}) - \tilde{A}(\tilde{s})\dfrac{\omega(b,\tilde{s})-z(b,\tilde{s})}{\tilde{s}}}{\tilde{A}(\tilde{s})\tau[1+o(1)]}.\end{aligned}$$

由推论 7.2.16 和推论 7.2.17 可知, 在带形区域 $|\Im\tilde{s}| \leqslant \varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 内, 当 $b > b_0$ 时, $\dfrac{\omega(b,s)-z(b,s)}{s}$ 是有界的, 而 $A(0) = \tilde{A}(0) = y_1'(0) - \theta y_1(0)$. 所以, 在此带形区域内 $\dfrac{A(s)-\tilde{A}(s)}{s}$ 也是有界的. 由此得出, 当 $b \geqslant b_0$ 时, $\dfrac{\mathrm{e}^{2i\tilde{s}b}-1}{\tilde{s}}$ 在上述带形区域内有界. 故当 $b \to +\infty$ 时,

$$\frac{\mathrm{e}^{2i\tilde{s}b}-1}{2\,i\tilde{s}b} = \frac{\mathrm{e}^{2i\tilde{s}b}-1}{2ib} = o\left(\frac{1}{b}\right) = o(1),$$

代入式 (7.4.15) 即得定理结论. □

7.5 正则边值问题的预解算子

7.5.1 偶数阶微分算子的预解算子

本节考虑 $2n$ 阶微分算式

$$\begin{aligned} l(y) = &(-1)^n(p_0(x)y^{(n)})^{(n)} + \cdots + (-1)^k(p_{n-k}(x)y^{(k)})^{(k)} \\ &+ \cdots + p_n(x)y, \quad x \in [a,b] \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

及边条件

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1,2,\cdots,2n, \tag{7.5.2}$$

所生成微分算子 T 的预解算子, 其中, $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可测函数, 并且在 $[a,b]$ 上可积. 用 $y^{[k]}(x)$ 表示 $y(x)$ 的 k 阶拟导数:

$$y^{[k]}(x) = y^{(k)}(x), \quad k = 1,2,\cdots,n-1;$$

$$y^{[n]}(x) = p_0(x)y^{(n)}(x);$$
$$y^{[n+k]}(x) = p_k(x)y^{(n-k)}(x) - (y^{[n+k-1]}(x))', \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

$U_v(y)$ 是 $y^{[0]}(a), y^{[1]}(a), \cdots, y^{[2n-1]}(a), y(b), y^{[1]}(b), \cdots, y^{[2n-1]}(b)$ 的线性组合. 算子 T 定义如下:

$$\begin{cases} Ty = l(y), \quad y \in D(T), \\ D(T) = \{y \in D(T_1) \mid U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \cdots, 2n\}. \end{cases}$$

下面讨论算子 T 的预解算子. 若 $\lambda \in \rho(T)$, 并且 $y_v = y_v(x, \lambda)$ $(v = 1, 2, \cdots, 2n)$ 是方程 $l(y) = \lambda y$ 满足初始条件

$$y_v^{[j-1]}(a, \lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq v, \\ 1, & j = v, \end{cases} \quad j, v = 1, 2, \cdots, 2n \tag{7.5.3}$$

的解, 则 $\forall f \in L^2(a, b)$, 利用常数变易法求微分方程 $l(y) - \lambda y = f(x)$ 的解

$$y_1(x) = \sum_{v=1}^{2n} C'_v y_v(x, \lambda) + \int_a^x f(\xi) \left(\sum_{v=1}^{2n} y_v(x, \lambda) \frac{W_v(\xi)}{W(\xi)} \right) \mathrm{d}\xi, \tag{7.5.4}$$

$$y_2(x) = \sum_{v=1}^{2n} C''_v y_v(x, \lambda) - \int_x^b f(\xi) \left(\sum_{v=1}^{2n} y_v(x, \lambda) \frac{W_v(\xi)}{W(\xi)} \right) \mathrm{d}\xi, \tag{7.5.5}$$

这里 $C'_1, \cdots, C'_{2n}, C''_1, \cdots, C''_{2n}$ 为常数, 而 W 为函数 $y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$ 的 Wronski 行列式:

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{[2n-1]} & y_2^{[2n-1]} & \cdots & y_{2n}^{[2n-1]} \\ y_1^{[2n-2]} & y_2^{[2n-2]} & \cdots & y_{2n}^{[2n-2]} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{2n} \end{vmatrix},$$

记 $W_1, W_2, \cdots, W_{2n}$ 是第一行对应元素的代数余子式. 式 (7.5.4) 与式 (7.5.5) 和的一半

$$y(x) = \frac{1}{2}(y_1(x) + y_2(x)) = \sum_{v=1}^{2n} C_v y_v(x, \lambda) + \int_a^b g(x, \xi, \lambda) f(\xi) \mathrm{d}\xi, \tag{7.5.6}$$

仍然是方程 $l(y) - \lambda y = f$ 的解, 其中 C_v $(v = 1, 2, \cdots, 2n)$ 为常数, 而

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2W(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \cdots & y_{2n}(x,\lambda)\\ y_1^{[2n-2]}(\xi,\lambda) & y_2^{[2n-2]}(\xi,\lambda) & \cdots & y_{2n}^{[2n-2]}(\xi,\lambda)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) & \cdots & y_{2n}(\xi,\lambda)\end{vmatrix}, \tag{7.5.7}$$

这里, 当 $x>\xi$ 时取 "+" 号, 当 $x<\xi$ 时取 "−" 号.

由上面的方法得到 $y(x)$ 是方程 $l(y)-\lambda y=f(x)$ 的解. 将 $y(x)$ 代入边条件 (7.5.2) 中得到一个齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{2n}C_jU_v(y_j)+\int_a^b f(\xi)U_v(y)\,\mathrm{d}\xi=0,\quad v=1,2,\cdots,2n,$$

解出 C_v $(v=1,2,\cdots,2n)$, 代入式 (7.5.6) 就得到边值问题

$$\begin{cases} l(y)-\lambda y=f(x),\\ U_v(y)=0,\quad v=1,2,\cdots,2n\end{cases}$$

的解

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.5.8}$$

其中,

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)}H(x,\xi,\lambda),$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_{2n})\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_{2n})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ U_{2n}(y_1) & U_{2n}(y_2) & \cdots & U_{2n}(y_{2n})\end{vmatrix},$$

$$H(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \cdots & y_{2n}(x,\lambda) & g(x,\xi,\lambda)\\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_{2n}) & U_1(g)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ U_{2n}(y_1) & U_{2n}(y_2) & \cdots & U_{2n}(y_n) & U_{2n}(g)\end{vmatrix}$$

根据上面讨论立得下述定理.

定理 7.5.1 微分算子 T 的预解算子 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是一个以 $G(x,\xi,\lambda)$ 为核的积分算子, 且

(1) 核函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 对于 x 和 ξ 都在区间 (a,b) 上连续, 并且关于 x 有直到 $2n-2$ 阶的连续导数;

(2) 任意固定 $\xi \in (a,b)$, 函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 关于 x 在区间 $[a,\xi)$ 和 $(\xi,b]$ 内, 有 $2n-1$ 阶连续导数和 $2n$ 阶导数, 而且当 $x=\xi$ 时, $2n-1$ 阶导数的跃度为 $\dfrac{1}{p_0(\xi)}$, 即

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}G(\xi+0,\xi,\lambda)-\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}G(\xi-0,\xi,\lambda)=\frac{1}{p_0(\xi)};$$

(3) 在区间 (a,ξ) 和 (ξ,b) 内, 把函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 看成 x 的函数时, 它满足边值问题

$$\begin{cases} l(G)=\lambda G, \\ U_v(G)=0, \quad v=1,2,\cdots,2n; \end{cases}$$

(4) $G(x,\xi,\lambda)$ 是参数 λ 的半纯函数, 其极点只可能是 T 的特征值.

在式 (7.5.1) 中, 若系数 $p_0(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数, 则式 (7.5.1) 是一个对称微分算式. 如果边条件 (7.5.2) 满足定理 3.1.23 的假设, 则由式 (7.5.1) 和式 (7.5.2) 所生成的微分算子 T 是自伴微分算子.

定理 7.5.2 自伴微分算子 T 的预解算子 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是一个以 $G(x,\xi,\lambda)$ 为核的积分算子, 且 $\overline{G(x,\xi,\lambda)}=G(\xi,x,\overline{\lambda})$.

证明 设 T 是自伴算子, $T^*=T$, 而 $\lambda\in\rho(T)$, 则 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在. 根据 $(T-\lambda I)^*=T^*-\overline{\lambda}I=T-\overline{\lambda I}$ 可知, $T^*-\overline{\lambda}I$ 也可逆, 且

$$((T-\overline{\lambda}I)^{-1})^*=(T^*-\overline{\lambda}I)^{-1}=(T-\overline{\lambda}I)^{-1}.$$

$\forall f(x),g(x)\in L^2(a,b)$, 由于

$$((T-\lambda I)^{-1}f,g)=(f,(T-\lambda I)^{-1^*}g)=(f,(T-\overline{\lambda}I)^{-1}g),$$

所以,

$$\int_a^b\int_a^b G(\xi,x,\lambda)\ f(\xi)\ \overline{g(x)}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b f(x)\ \overline{G(\xi,x,\overline{\lambda})}\ \overline{g(\xi)}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}x,$$

故有

$$G(x,\xi,\lambda)=\overline{G(\xi,x,\overline{\lambda})}.$$ □

在式 (7.5.1) 中, 若系数 $p_0(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的复值函数, 则式 (7.5.1) 是一个 J-对称微分算式. 如果边条件 (7.5.2) 满足也定理 5.3.2 的假设, 则由式 (7.5.1) 和式 (7.5.2) 所生成的微分算子 T 是 J-自伴微分算子.

定理 7.5.3 J-自伴微分算子 T 的预解算子 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是一个以 $G(x,\xi,\lambda)$ 为核的积分算子, 且

$$G(x,\xi,\lambda)=G(\xi,x,\lambda).$$

证明 设 T 是 J-自伴算子, $T^* = JTJ$, 而 $\lambda \in \rho(T)$, 即 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在. 由

$$(T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda}I = JTJ - \overline{\lambda}I = JTJ - \overline{\lambda}JJ = JTJ - J\lambda J,$$

可得

$$\begin{aligned}(T^* - \overline{\lambda}I)J(T-\lambda I)^{-1}J &= J(T-\lambda I)JJ(T-\lambda I)^{-1}J \\ &= J(T-\lambda I)(T-\lambda I)^{-1}J = I.\end{aligned}$$

同理

$$J(T-\lambda I)^{-1}J(T^* - \overline{\lambda}I) = I,$$

所以 $T^* - \overline{\lambda}I$ 也可逆, 且

$$((T-\lambda I)^{-1})^* = (T^* - \overline{\lambda}I)^{-1} = J(T-\lambda I)^{-1}J.$$

于是 $\forall f(x), g(x) \in L^2(a,b)$,

$$((T-\lambda I)^{-1}f, g) = (f, (T^* - \overline{\lambda}I)^{-1}g) = (f, J(T-\lambda I)^{-1}Jg),$$

即有

$$\int_a^b \int_a^b G(\xi, x, \lambda)\ f(\xi)\ \overline{g(x)}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}x = \int_a^b \int_a^b f(x)\ \overline{\overline{G(\xi, x, \lambda)\ \ \overline{g(\xi)}}}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}x,$$

故有

$$G(x, \xi, \lambda) = G(\xi, x, \lambda). \qquad \square$$

根据预解算子积分核 $G(x,\xi,\lambda)$ 的结构式 (7.5.8) 可得下面定理.

定理 7.5.4 当 a, b 两个端点均是正则点时, 正则微分算子 T 的预解算子的积分核 $G(x,\xi,\lambda)$ 满足

$$\int_a^b |G(x,\xi,\lambda)|^2\ \mathrm{d}\xi < \infty, \quad \int_a^b |G(x,\xi,\lambda)|^2 \mathrm{d}x < \infty,$$

$$\int_a^b \int_a^b |G(x,\xi,\lambda)|^2 \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\xi < \infty.$$

若 a, b 中至少有一个端点是奇异端点, 则式 (7.5.1) 是一个对称 (或 J-对称) 的奇异微分算子, 它生成的最小算子 T_0 的亏指数 $m = \operatorname{def} T_0$, $n \leqslant m \leqslant 2n$, T_0 具有自伴扩张 (J-自伴扩张). 设其自伴扩张 (J-自伴扩张) 算子为 T', 则采用同样的研究方法可以得到 T' 的预解算子是一个积分算子, 其核 $G'(x,\xi,\lambda)$ 同样满足定理 7.5.1 中的 (1)~(4). 且在对称 (J-对称) 情形下也满足定理 7.5.2(或对应的定理 7.5.3). 当算子 T_0 的亏指数为 $(2n, 2n)$ 时, T' 的预解算子是一个积分算子, 其核 $G'(x,\xi,\lambda)$ 同样满足定理 7.5.4.

7.5.2　二阶正则边值问题的预解算子

在本小节中研究边值问题

$$-y''+p(x)y=\lambda y, \tag{7.5.9}$$

$$y'(0)-\theta y(0)=0, \tag{7.5.10}$$

$$0=B(y)=\begin{cases} y'(b)-\theta_1 y(b), & \theta_1\neq\infty, \\ y(b), & \theta_1=\infty \end{cases} \tag{7.5.11}$$

所生成的预解算子 R_λ. 仍然假设 $p(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积.

设 $\mu_1(x,s),\mu_2(x,s)$ 是微分方程 $l(y)=s^2y$ 的两个线性独立解, 对固定的 x $(0\leqslant x<\infty)$, $\mu_1(x,s),\mu_2(x,s)$ 关于 s 在复平面 s 的区域 D 内解析. $\omega(s)$ 是关于 $\mu_1(x,s)$, $\mu_2(x,s)$ 的 Wronski 行列式.

定理 7.5.5　若 λ 不是边值问题 (7.5.9)~(7.5.11) 的特征值, 则边值问题 (7.5.9)~(7.5.11) 所生成的算子 L 的预解算子 $R_\lambda=(L-\lambda I)^{-1}$ 是一个以 $G(x,\xi,\lambda)$ 为核的积分算子, 其中

$$G(x,\xi,\lambda)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mu_1(x,s) & \mu_2(x,s) & g(x,\xi,s) \\ \mu_1'(0,s)-\theta\mu_1(0,s) & \mu_2'(0,s)-\theta\mu_2(0,s) & g_x'(0,\xi,s)-\theta g(0,\xi,s) \\ B(\mu_1) & B(\mu_2) & B(g) \end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} \mu_1'(0,s)-\theta\mu_1(0,s) & \mu_2'(0,s)-\theta\mu_2(0,s) \\ B(\mu_1) & B(\mu_2) \end{vmatrix}, \tag{7.5.12}$$

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\omega(s)}[\mu_1(x,s)\ \mu_2(\xi,s)-\mu_2(x,s)\ \mu_1(\xi,s)], & \xi<x, \\ \dfrac{1}{2\omega(s)}[\mu_1(x,s)\ \mu_2(\xi,s)-\mu_2(x,s)\ \mu_1(\xi,s)], & \xi>x. \end{cases}$$

证明　利用常数变易法或定理 7.5.1 立得上面结论. □

推论 7.5.6　$G(x,\xi,\lambda)$ 也可表示为如下形式: 当 $0\leqslant\xi<x\leqslant b$ 时,

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{-1}{\omega(s)\Delta}\begin{vmatrix} \mu_1(x,s) & \mu_2(x,s) & \mu_1(x,s)\ \mu_2(\xi,s) \\ \mu_1'(0,s)-\theta\mu_1(0,s) & \mu_2'(0,s)-\theta\mu_2(0,s) & [\mu_2'(0,s)-\theta\mu_2(0,s)]\ \mu_1(\xi,s) \\ B(\mu_1) & B(\mu_2) & B(\mu_1)\ \mu_2(\xi,s) \end{vmatrix}; \tag{7.5.13}$$

当 $0\leqslant x<\xi\leqslant b$ 时,

$$G(x,\xi,\lambda)$$
$$=\frac{-1}{\omega(s)\Delta}\begin{vmatrix}\mu_1(x,s) & \mu_2(x,s) & \mu_2(x,s)\ \mu_1(\xi,s)\\ \mu_1'(0,s)-\theta\mu_1(0,s) & \mu_2'(0,s)-\theta\mu_2(0,s) & [\mu_2'(0,s)-\theta\mu_2(0,s)]\ \mu_1(\xi,s)\\ B(\mu_1) & B(\mu_2) & B(\mu_1)\ \mu_2(\xi,s)\end{vmatrix}. \tag{7.5.14}$$

定理 7.5.7 设 $\lambda=s^2$ ($\Im s>0$) 不是 L_θ 的特征值, $k(x,\xi,\lambda)$ 是算子 L_θ 的预解算子 $R_\lambda=(L_\theta-\lambda I)^{-1}$ 的核, 则对于 $\theta_1=\infty$ 或 θ_1 有限但 $\mathrm{i}s\neq-\theta_1$, 当 $b\to+\infty$ 时,

$$G(x,\xi,\lambda)=k(x,\xi,\lambda)+o(1), \tag{7.5.15}$$

在 $0\leqslant x,\xi\leqslant c$ ($c>0$) 内一致成立.

证明 当 θ_1 有限, 且 $-\mathrm{i}s\neq\theta_1$ 时, 在定理 7.5.5 中, 取 $\mu_1(x,s)=y_1(x,s)$, $\mu_2(x,s)=y_2(x,s)$, 则有如下估计:

$$B(y_1)=y_1'(b,s)-\theta_1y_1(b,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)],$$

$$B(y_2)=y_2'(b,s)-\theta_1y_2(b,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)].$$

令 $A_1(s)=y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)$, $A_2(s)=y_2'(0,s)-\theta y_2(0,s)$, 则由式 (7.5.12) 得

$$\Delta=A_1(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]-A_2(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]. \tag{7.5.16}$$

由于 $b\to+\infty$ 时, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}=o(1)$, 所以,

$$\Delta=-A_1(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[\mathrm{i}s+\theta_1+o(1)]. \tag{7.5.17}$$

当 $0\leqslant\xi<x\leqslant b$ 时, 由 $\mu_1=y_1$, $\mu_2=y_2$ 及式 (7.5.17) 和式 (7.5.14) 可得

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{2\mathrm{i}s(\mathrm{i}s+\theta_1)}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}}{A_1(s)}[1+o(1)]$$
$$\times\begin{vmatrix}y_1(x,s) & y_2(x,s) & y_1(x,s)\ y_2(\xi,s)\\ A_1(s) & A_2(s) & A_2(s)\ y_1(\xi,s)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)] & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[-\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]\ y_2(\xi,s)\end{vmatrix} \tag{7.5.18}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}s(\mathrm{i}s+\theta_1)}\ \frac{1}{A_1(s)}\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}bs}\Delta_1[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]-(\mathrm{i}s+\theta_1)\Delta_2[1+o(1)]$$
$$+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}bs}\Delta_3[\mathrm{i}s-\theta_1+o(1)]\}, \tag{7.5.19}$$

其中 Δ_1, Δ_2, Δ_3 是按照式 (7.5.18) 中行列式最后一行展开的代数余子式. 在 $0 \leqslant x,\xi \leqslant c$ 上, 行列式 Δ_1, Δ_2 和 Δ_3 有界. 而且当 $b \to +\infty$ 时, $O(\mathrm{e}^{2ibs}) = o(1)$ 关于 x,ξ 一致成立. 所以,

$$\begin{aligned} G(x,\xi,\lambda) &= \frac{1}{2\mathrm{i}sA_1(s)}\{\Delta_2[1+o(1)]+o(1)\} \\ &= -\frac{1}{2\mathrm{i}sA_1(s)}\{A_1(s)y_1(x,s)y_2(\xi,s)-A_2(s)y_1(x,s)y_1(\xi,s)+o(1)\}, \end{aligned}$$

故

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_1(\xi,s) - \frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_2(\xi,s)+o(1).$$

再根据 (7.3.10) 可知

$$G(x,\xi,\lambda) = k(x,\xi,\lambda)+o(1).$$

同理可以证明, 在 $0 \leqslant \xi < x \leqslant b$ 上式 (7.5.15) 也成立.

当 $\theta_1 = \infty$ 时, 由于

$$B(y_1) = y_1(b,s) = \mathrm{e}^{ibs}[1+o(1)], \quad B(y_2) = y_2(b,s) = \mathrm{e}^{-ibs}[1+o(1)],$$

所以

$$\Delta = A_1(s)\mathrm{e}^{-ibs}[1+o(1)] - A_2(s)\mathrm{e}^{ibs}[1+o(1)] = \mathrm{e}^{-ibs}A_1(s)[1+o(1)].$$

从而

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{i}sA_1(s)}\{\mathrm{e}^{2ibs}\Delta_1[1+o(1)]+\Delta_2[1+o(1)]+\mathrm{e}^{2ibs}\Delta_3[1+o(1)]\},$$

由此便可得式 (7.5.15). □

7.6　L_θ 的特征展开

本节研究算子 L_θ 的特征展开 (谱分解). 当 $p(x)$ 为实函数时, L_θ 的谱分解由自伴算子的谱分解定理得到, 而且有相应的特征展开. 当 $p(x)$ 为复函数 ($\Im p(x) \neq 0$) 时, L_θ 的谱分解较复杂. 在本节仍然要求满足 7.4.2 小节中关于方程的系数 $p(x)$ 和 θ 的条件 (1) 和条件 (2), 即

(1) 对 $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x < \infty$;

(2) 当 $s \geqslant 0$ 时, 函数 $A(s) = y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)$ 和 $\tilde{A}(s) = y_3'(0,s) - \theta y_3(0,s)$ 均不为零.

7.6.1 曲线 $C_{m,q}$

用 D_1 表示 λ-平面上的区域

$$D_1=\{\lambda=s^2 \mid s=\sigma+\mathrm{i}\tau,\ \tau\geqslant\varepsilon_1\}=\left\{\lambda=\xi+\mathrm{i}\eta\in\mathbb{C} \mid \xi\leqslant\frac{\eta^2}{4\varepsilon_1}-\varepsilon_1^2\right\},$$

这里 $\varepsilon_1>0$ 同定理 7.4.5 中所定义. 令

$$D_2=\{\lambda=s^2\in\mathbb{C} \mid s=\sigma+\mathrm{i}\tau,\ |\tau|\leqslant\varepsilon_1,\ \sigma\geqslant0\}.$$

曲线图示见图 7.6.1.

设 m,q 是任意的两个正整数. 令 $R_{m,q}=\left(m+\dfrac{1}{2q}\right)\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$, 则 $R_{m,q}\to\infty$ $(m\to\infty)$. 记 λ-平面上的曲线 $C''_{m,q}=\{\lambda=s^2 \mid s=R_{m,q}+\mathrm{i}\tau,\ -\varepsilon\leqslant\tau\leqslant\varepsilon_1\}$, 即 $\lambda\in C''_{m,q}$ 当且仅当 $\lambda=\xi+\mathrm{i}\eta$, $\xi=R_{m,q}^2-\dfrac{\eta^2}{4R_{m,q}^2}$. 由此可知 $C''_{m,q}\subset D_2$. 设 $C''_{m,q}$ 与 D_2 的边界交于 A 和 B, 则 $\exists q_1$, 使得在 D_1 内以原点 O 为圆心, 以 $q_1^2+R_{m,q}^2$ 为半径作圆弧, 与 D_2 的边界也交于 A 和 B, 所以 $C'_{m,q}$ 与 $C''_{m,q}$ 在 λ-平面上形成一条封闭曲线. 记该曲线为 $C_{m,q}=C'_{m,q}\cup C''_{m,q}$, 见图 7.6.2.

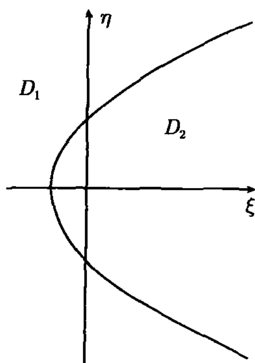


图 7.6.1

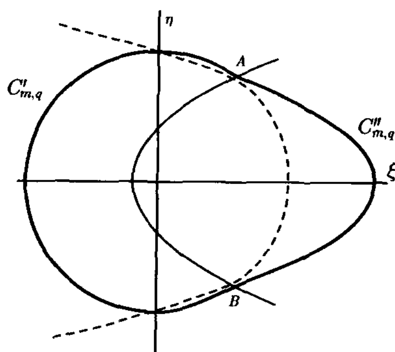


图 7.6.2

7.6.2 在 $C_{m,q}$ 上边值问题的预解算子

考虑如下问题:

$$-y''+p(x)y=\lambda y, \tag{7.6.1}$$

$$y'(0)-\theta y(0)=0, \tag{7.6.2}$$

$$y'(b)-\theta_1 y(b)=0, \tag{7.6.3}$$

其中, $p(x)$ 是在 $(0,\infty)$ 上满足条件 (1) 及条件 (2) 的复函数, $b=q\sqrt{m}$, m,q 为正整数, θ 和 θ_1 是复数. 当 $\theta_1=\infty$ 时, 条件 (7.6.3) 等价于 $y(b)=0$.

引理 7.6.1　存在常数 b_0,m_0,c, 使得对 $m>m_0$, 当 $b=q\sqrt{m}\geqslant b_0=q\sqrt{m_0}$ 时, 在 $C_{m,q}$ 上边值问题 (7.6.1)~(7.6.3) 的预解算子的核 $G(x,\xi,\lambda)$ 满足

$$G(x,\xi,\lambda)\leqslant\frac{c}{\sqrt{|\lambda|}}\tag{7.6.4}$$

对所有的 x,ξ 在正方形区域 $0\leqslant\xi,x\leqslant b$ 内成立.

证明　考虑 $\theta_1\neq\infty$ 情形, 在定理 7.5.5 中取 $\mu_1=y_1$, $\mu_2=y_2$, 由 y_1, y_2 的渐近表示可得当 $s\to\infty$ 时,

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mathrm{i}s\left[1+o\left(\dfrac{1}{s}\right)\right] & -\mathrm{i}s\left[1+o\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]\\ \mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}\left[1+o\left(\dfrac{1}{s}\right)\right] & -\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}\left[1+o\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]\end{vmatrix}$$
$$=s^2\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}\left[1+o\left(\frac{1}{s}\right)\right]-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}bs}\left[1+o\left(\frac{1}{s}\right)\right]\right\}.$$

当 $\Im s\geqslant\varepsilon_1$, $b\geqslant b_0$, 且 $s\to\infty$ 时, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}bs}=o(1)$ 关于 b 一致成立. 所以,

$$G(x,\xi,\lambda)$$
$$=-\frac{1}{2\mathrm{i}s^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[1+o(1)]\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s|x-\xi|}[1+o(1)]\\ \mathrm{i}s[1+o(1)] & -\mathrm{i}s[1+o(1)] & -\mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\xi}[1+o(1)]\\ \mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & -\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & \mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b-\xi)s}[1+o(1)]\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}s}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(b-x)}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s|x-\xi|}[1+o(1)]\\ 1+o(1) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}[1+o(1)]\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & -[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(b-\xi)}[1+o(1)]\end{vmatrix},$$

上面行列式中的所有元素在 $0\leqslant\xi,x\leqslant b$ $(b\geqslant b_0)$, $\Im s\geqslant\varepsilon_1$ 上有界, 故

$$G(x,\xi,\lambda)\leqslant\frac{c}{|s|}=\frac{c}{\sqrt{|\lambda|}},$$

即证明了 λ 在 $C'_{m,q}$ 上时不等式 (7.6.4) 成立.

在 $C''_{m,q}$ 上, 令 $\mu_1=y_1$, $\mu_2=y_3$, 当 $|\Im s|\leqslant\varepsilon_1$, $s\to\infty$ 时,

$$\Delta=-s^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}\left\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}bs}\left[1+o\left(\frac{1}{s}\right)\right]-1+o\left(\frac{1}{s}\right)\right\}.\tag{7.6.5}$$

分别记 $C''_{m,q}$ 对应着 $\tau\geqslant 0$ 和 $\tau\leqslant 0$ 的两段弧为 $C''^{\ +}_{m,q}$ 和 $C''^{\ -}_{m,q}$.

在弧 $C''^{\ +}_{m,q}$ 上, 由于 $\tau\geqslant 0$, 且

$$\begin{aligned}2\mathrm{i}bs&=2\mathrm{i}b(R_{mq}+\mathrm{i}c)=2\mathrm{i}q\sqrt{m}\left[\left(m+\frac{1}{2q}\right)\frac{\pi}{\sqrt{m}}+\mathrm{i}\tau\right]\\&=(2mq+1)\pi\mathrm{i}-2\tau q\sqrt{m},\end{aligned}$$

所以,

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}bs}=-\mathrm{e}^{-2\tau q\sqrt{m}},$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta&=-s^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}\left\{-\mathrm{e}^{-2\tau q\sqrt{m}}\left[1+o\left(\frac{1}{s}\right)\right]-1+o\left(\frac{1}{s}\right)\right\}\\&=-s^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}\left[1+\mathrm{e}^{-2\tau q\sqrt{m}}+o\left(\frac{1}{s}\right)\right].\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}&G(x,\xi,\lambda)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}s}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2\tau q\sqrt{m}}+o\left(\frac{1}{s}\right)}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(b-x)}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}[1+o(1)]\\ 1+o(1) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}[1+o(1)]\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & -[1+o(1)] & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(b-\xi)}[1+o(1)]\end{vmatrix}\end{aligned}$$

对于 $\tau\geqslant 0$, 当 $0\leqslant\xi,x\leqslant b$ 时, 上面行列式中的每一项均有界, 而且 $\left[1+\mathrm{e}^{-2\tau q\sqrt{m}}+o\left(\frac{1}{s}\right)\right]^{-1}$ 也有界, 所以在 $C''^{\ +}_{m,q}$ 上有 $G(x,\xi,\lambda)\leqslant\dfrac{c}{|s|}$.

在 $C''^{\ -}_{m,q}$ 上, $\tau\leqslant 0$, 只需变换 $\mu_1=y_3$, $\mu_2=y_1$ 同样可得到

$$G(x,\xi,\lambda)=-\frac{1}{2\mathrm{i}s}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2\tau q\sqrt{m}}+o\left(\frac{1}{s}\right)}$$

$$\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(b-x)}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(\xi-x)}[1+o(1)]\\ -[1+o(1)] & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}[1+o(1)]\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bs}[1+o(1)] & 1+o(1) & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(b-\xi)}[1+o(1)]\end{vmatrix}$$

从而证明了关于 $G(x,\xi,\lambda)$ 的不等式 (7.6.4) 在 $C''^{\ -}_{m,q}$ 上也成立.

对 $\theta_1=\infty$ 的情形类似可证. □

7.6.3 L_θ 的预解算子核的积分表示

设 $\lambda_1=s_1^2$, $\lambda_2=s_2^2$, $\cdots$, $\lambda_r=s_r^2$ 是 L_θ 的特征值, $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_r(x)$

是对应的特征函数. 假设 $s_1, s_2, \cdots, s_r$ 均是 $y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s)$ 的简单零点, 即设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 都是单重特征值.

定理 7.6.2　设 $K(x,\xi,\lambda)$ 是 L_θ 的预解算子的核, 则对 $\forall\lambda \in \rho(L_\theta)$,

$$K(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} \frac{y_k(x)y_k(\xi)}{(\lambda_k - \lambda)\displaystyle\int_0^\infty y_k^2(x)\mathrm{d}x} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{7.6.6}$$

并且式 (7.6.6) 中的积分在 $0 \leqslant x,\xi < \infty$ 上一致收敛. 其中

$$A(s) = y_1'(0,s) - \theta_1 y_1(0,s), \quad \tilde{A}(s) = y_3'(0,s) - \theta y_3(0,s),$$

$$\tilde{y} = \tilde{A}(s)y_1(x,s) - A(s)y_3(x,s), \quad y = y_1(x,s) + y_2(x,s)\frac{y_1(b,s) - \theta_1 y_1(b,s)}{y_2(b,s) - \theta_1 y_2(b,s)}.$$

证明　首先证明式 (7.6.6) 关于 x,ξ $(0 \leqslant x,\xi < \infty)$ 一致收敛.

根据定理 7.2.6 和定理 7.2.8 以及定理 7.2.13 和定理 7.2.15 的估计可知, 对 $s > 0$, 当 s 充分大时, 函数 $\dfrac{1}{s}\tilde{y}(x,s)$ 在 $0 \leqslant x < \infty$ 上一致有界, 函数 $\dfrac{1}{s}A(s)\tilde{A}(s)$ 是下有界的. 所以, 对固定 λ $(\Im\lambda \neq 0)$ 和充分大的 $s > 0$,

$$\left|\frac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\right| \leqslant \frac{c}{s^2}, \tag{7.6.7}$$

故式 (7.6.6) 中的积分关于 x,ξ $(0 \leqslant x,\xi < \infty)$ 一致收敛.

其次证明等式 (7.6.6) 成立.

考虑 $b = q\sqrt{m}$, $\lambda_0 \in \rho(L_\theta)$, $\theta_1 = \infty$ 情形. 当 m 充分大时, λ_0 也不是边值问题 (7.6.1)~(7.6.3) 的特征值, 根据定理 7.4.4 可知, 在区域 D 内存在边值问题 (7.6.1)~(7.6.3) 的预解算子的 r 个单重极点 $\lambda_1^{(b)}$, $\lambda_2^{(b)}$, $\cdots$, $\lambda_r^{(b)}$, 并且 $b \to \infty$ 时, $\lambda_r^{(b)} \to \lambda_k$ $(k = 1,2,\cdots,r)$. 取充分大的 m 和任意的 q, 使得 λ_0, $\lambda_1^{(b)}$, $\lambda_2^{(b)}$, $\cdots$, $\lambda_r^{(b)}$ 均包含在曲线 $C_{m,q}$ 内.

考虑积分 $I_{m,q} = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_{C_{mq}} \frac{G(x,\xi,\lambda)}{\lambda - \lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda$. 由引理 7.6.1 可知

$$|I_{m,q}| \leqslant \frac{c}{2\pi}\oint_{C_{mq}} \frac{1}{q|\sqrt{\lambda}(\lambda - \lambda_0)|}\,\mathrm{d}\lambda \to 0, \quad m \to \infty,$$

所以, 当 $m \to \infty$ 时, $I_{m,q} \to 0$ 且关于 q 一致收敛. 从而对 $\forall\delta > 0$, 存在充分大的 m, 使得对所有正整数 q,

$$|I_{m,q}| < \delta.$$

由于 $\dfrac{G(x,\xi,\lambda)}{\lambda - \lambda_0}$ 在 $C_{m,q}$ 内的奇异点是 $\lambda_0, \lambda_1^{(b)}, \lambda_2^{(b)}, \cdots, \lambda_r^{(b)}$ 及 $\lambda_n = \tilde{s}_n^2$ $(n =$

$\nu,\nu+1,\cdots,\mu$), 其中, $\tilde{s}_n=\frac{n\pi}{b}+\frac{1}{2\mathrm{i}b}\omega\left(\frac{n\pi}{b}\right)+o\left(\frac{1}{b}\right)$, 而 ν 和 μ 分别是满足 $\Re\tilde{s}_n\geqslant 0$ 和 $\Re\tilde{s}_n\leqslant R_{m,q}$ 的最小整数和最大整数. $\frac{G(x,\xi,\lambda)}{\lambda-\lambda_0}$ 在 λ_0 点处的留数为 $G(x,\xi,\lambda_0)$, 在其他点的留数分别为

$$-\frac{y(x,s_k^{(b)})y(\xi,s_k^{(b)})}{(x_k^{(b)}-\lambda_0)\int_0^b y^2(x,s_k^{(b)})\mathrm{d}x},\quad k=1,2,\cdots,r$$

和

$$\frac{\tilde{y}(x,\tilde{s}_n)\tilde{y}(\xi,\tilde{s}_n)}{(\tilde{s}_n^2-\lambda_0)\int_0^b \tilde{y}^2(x,\tilde{s}_n)\mathrm{d}x},\quad n=\nu,\nu+1,\cdots,\mu,$$

其中,

$$y(x,s)=y_1(x,s)-\frac{y_1(b,s)}{y_2(b,s)}y_2(x,s),$$

$$\tilde{y}(x,s)=[y_3'(0,s)-\theta y_3(0,s)]\,y_1(x,s)-[y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)]\,y_3(x,s).$$

由留数定理得

$$\begin{aligned}I_{m,q}=G(x,\xi,\lambda_0)&-\sum_{k=1}^{n}\frac{y(x,s_k^{(b)})y(\xi,s_k^{(b)})}{(\lambda_k^{(b)}-\lambda_0)\int_0^b y^2(x,s_k^{(b)})\mathrm{d}x}\\&-\sum_{n=\nu}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\tilde{s}_n)\,\tilde{y}(\xi,\tilde{s}_n)}{(\tilde{s}_n^2-\lambda_0)\int_0^b \tilde{y}^2(x,s_n)\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}G(x,\xi,\lambda_0)=I_{m,q}&+\sum_{k=1}^{n}\frac{y(x,s_k^{(b)})y(\xi,s_k^{(b)})}{(\lambda_k^{(b)}-\lambda_0)\int_0^b y^2(x,s_k^{(b)})\mathrm{d}x}\\&+\sum_{n=\nu}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\tilde{s}_n)\,\tilde{y}(\xi,\tilde{s}_n)}{(\tilde{s}_n^2-\lambda_0)\int_0^b \tilde{y}^2(x,s_n)\mathrm{d}x}.\end{aligned}\tag{7.6.8}$$

根据定理 7.5.7 中的估计 (7.5.15) 可知, $G(x,\xi,\lambda_0)=K(x,\xi,\lambda_0)+\eta_1$, 其中 $\eta_1=o(1)$ $(m\to\infty)$ 关于 q 一致成立. 适当取充分大的 m, 可使得对所有正整数 q, $|I_{m,q}|<\delta$ 且 $|\eta_1|<\delta$.

再利用定理 7.4.7 和定理 7.4.8 估计 (7.6.8) 右边第二项, 可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{y(x,s_k^{(b)})y(\xi,s_k^{(b)})}{(\lambda_k^{(b)}-\lambda_0)\int_0^b y^2(x,s_k^{(b)})\mathrm{d}x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y(x,s_k)y(\xi,s_k)}{(\lambda_k-\lambda_0)\int_0^\infty y^2(x,s_k)\mathrm{d}x}+\eta_2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(x)y_k(\xi)}{(\lambda_k-\lambda_0)\displaystyle\int_0^{\infty}y_k^2(x)\mathrm{d}x}+\eta_2,$$

其中, $\eta_2=o(1)$ $(m\to\infty)$ 关于 q 一致成立. 适当取充分大的 m, 可使得 $|I_{m,q}|<\delta$, $|\eta_1|<\delta$ 且 $|\eta_2|<\delta$.

再估计 (7.6.8) 右边的第三项. 设 $\sigma_n=\Re\tilde{s}_n$ $(n=\nu,\nu+1,\cdots,\mu)$. 根据引理 7.4.1 和推论 7.4.3 可知, 当 $b\to\infty$ 时, $\sigma_n-\sigma_{n-1}=\dfrac{\pi}{b}[1+o(1)]$, $\sigma_n=\tilde{s}_n+o(1)$ 在有限区间 $0\leqslant\sigma_n\leqslant R$ 上一致成立, 所以, 上式对于固定 m, 当 $q\to\infty$ 时, 关于 σ_n 在 $0\leqslant\sigma_n\leqslant R_{m,1}$ 上一致成立.

由于 $y(x,s)$ 是关于 s 的解析函数, 所以当 $q\to\infty$ 时, $\tilde{y}(x,\tilde{s}_n)=\tilde{y}(x,\sigma_n)+o(1)$, 再由定理 7.4.9, 当 $q\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\int_0^b\tilde{y}(x,\tilde{s}_n)\mathrm{d}x}&=\frac{1}{-2A(\tilde{s}_n)\ \tilde{A}(\tilde{s}_n)+o(1)}\ \frac{1}{b}\\&=-\frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{A(\tilde{s}_n)\ \tilde{A}(\tilde{s}_n)+o(1)}(1+o(1))(\sigma_n-\sigma_{n-1})\\&=-\frac{1}{2\pi}\ \frac{\sigma_n-\sigma_{n-1}}{A(\tilde{s}_n)\ \tilde{A}(\tilde{s}_n)}(1+o(1)).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=\nu}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\tilde{s}_n)\ \tilde{y}(\xi,\tilde{s}_n)}{(\tilde{s}_n^2-\lambda_0)\displaystyle\int_0^b\tilde{y}^2(x,s_n)\mathrm{d}x}=\frac{-1}{2\pi}\sum_{n=\nu}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\sigma_n)\ \tilde{y}(\xi,\sigma_n)}{(\sigma_n^2-\lambda_0)A(\sigma_n)\tilde{A}(\sigma_n)}(\sigma_n-\sigma_{n-1})+\eta_3,$$

由 $F(\sigma)=\dfrac{\tilde{y}(x,\sigma)\ \tilde{y}(\xi,\sigma)}{(\sigma^2-\lambda_0)A(\sigma)\tilde{A}(\sigma)}$ 的有界性可知

$$|\eta_3|\leqslant c\cdot o(1)\sum_{n=\nu}^{\mu}(\sigma_n-\sigma_{n-1})\leqslant c\cdot o(1)\frac{(\mu-\nu)\pi}{b}[1+o(1)]=c\frac{(\mu-\nu)\pi}{q\sqrt{m}}o(1).$$

对于固定的 m, 选取充分大的 q, 可使得 $|\eta_3|<\delta$.

由 $R_m=\pi\sqrt{m}$, $R_{mq}=\pi\sqrt{m}+\dfrac{\pi}{2q\sqrt{m}}=R_m+\dfrac{\pi}{2q\sqrt{m}}$, 设 μ' 是使得 $\sigma_n\leqslant R_m$ 的最大整数 n, 则

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{2\pi}\sum_{n=\nu}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\sigma_n)\tilde{y}(\xi,\sigma_n)}{(\sigma_n^2-\lambda_0)A(\sigma_n)\tilde{A}(\sigma_n)}(\sigma_n-\sigma_{n-1})\\=&\frac{-1}{2\pi}\sum_{n=\nu}^{\mu'}\frac{\tilde{y}(x,\sigma_n)\tilde{y}(\xi,\sigma_n)}{(\sigma_n^2-\lambda_0)A(\sigma_n)\tilde{A}(\sigma_n)}(\sigma_n-\sigma_{n-1})+\eta_4,\end{aligned}$$

其中,

$$\eta_4 = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=\mu'+1}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\sigma_n)\tilde{y}(\xi,\sigma_n)}{(\sigma_n^2-\lambda_0)A(\sigma_n)\tilde{A}(\sigma_n)}(\sigma_n-\sigma_{n-1}),$$

故 $|\eta_4| \leqslant c\sum_{n=\mu'+1}^{\mu}(\sigma_n-\sigma_{n-1}) \leqslant c\frac{\pi}{2q\sqrt{m}}$. 选取充分大 q, 可使得 $|\eta_4|<\delta$.

又因为当 $q\to\infty$ 时, $\sigma_n-\sigma_{n-1}=o(1)$, 所以

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{2\pi}\sum_{n=\nu}^{\mu}\frac{\tilde{y}(x,\sigma_n)\tilde{y}(\xi,\sigma_n)}{(\sigma_n^2-\lambda_0)A(\sigma_n)\tilde{A}(\sigma_n)}(\sigma_n-\sigma_{n-1})\\ =&\frac{-1}{2\pi}\int_0^{R_m}\frac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda_0)A(s)\tilde{A}(s)}\,\mathrm{d}s+\eta_5,\end{aligned}$$

当 $q\to\infty$ 时, $|\eta_5|\to 0$. 选取充分大的 q, 可使得 $|\eta_5|<\delta$. 所以,

$$\begin{aligned}K(x,\xi,\lambda_0)=&\sum_{k=1}^{r}\frac{y_k(x)y_k(\xi)}{(\lambda_k-\lambda_0)\displaystyle\int_0^\infty y_k^2(x)\mathrm{d}x}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{R_m}\frac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\,\mathrm{d}s\\&+(I_{m,q}-\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5).\end{aligned}$$

由上面的估计知, 对充分大的 m 和 q, $|I_{m,q}-\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5|<6\delta$. 故结论得证. □

7.6.4 L_θ 的特征函数展开

用 E_θ 表示满足下列条件的函数 $g(x)$ 的全体:

(1) $g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可积, 即 $g(x)\in L^1[0,\infty)$;

(2) 在任何区间 $[0,a]$ 上, $g'(x)$ 存在且绝对连续, 即 $g'(x)\in AC[0,a]$ $(0<a<\infty)$;

(3) $l(y)$ 在 $[0,\infty)$ 上可积, 即 $l(y)\in L^1[0,\infty)$;

(4) $g'(0)-\theta g(0)=0$.

引理 7.6.3 对任意的 $g(x)\in E_\theta$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $g(x)\to 0$, $g'(x)\to 0$.

证明 设 $\lambda\in\rho(L_\theta)$, $f(x)=l(g)-\lambda g$, 由 E_θ 的定义可知 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可积, 从而根据 7.3.2 小节中的讨论知

$$g(x)=\int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

其中,

$$K(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_1(\xi,s)-\dfrac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_2(\xi,s), & \xi<x,\\[2mm] \dfrac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_1(\xi,s)-\dfrac{1}{2\mathrm{i}s}y_2(x,s)y_1(\xi,s), & \xi>x,\end{cases}$$

而 $\psi(s)=\dfrac{y_2'(0,s)-\theta y_2(0,s)}{y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)}$ 如式 (7.3.8) 所定义.

根据 $y_1(x,s)$ 与 $y_2(x,s)$ 的渐近估计有

$$|K(x,\xi,\lambda)|\leqslant\begin{cases}\text{const}[\mathrm{e}^{-\tau(x+\xi)}+\mathrm{e}^{-\tau(x-\xi)}], & \xi<x,\\ \text{const}[\mathrm{e}^{-\tau(x+\xi)}+\mathrm{e}^{-\tau(\xi-x)}], & \xi>x,\end{cases}$$

其中, $\tau=\Im s>0$. 所以, 对固定的 λ, $|K(x,\xi,\lambda)|\leqslant c$ 有界. 由此可知, 对任何可积函数 $f(x)$,

$$g(x)=\int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\in E_\theta,$$

且

$$g(x)=\frac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)\int_0^\infty f(\xi)y_1(\xi,s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)\int_0^x f(\xi)y_2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$
$$-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_2(x,s)\int_x^\infty f(\xi)y_1(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$g'(x)=\frac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1'(x,s)\int_0^\infty f(\xi)y_1(\xi,s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_1'(x,s)\int_0^x f(\xi)y_2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$
$$-\frac{1}{2\mathrm{i}s}y_2'(x,s)\int_x^\infty f(\xi)y_1(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi.$$

反复利用定理 7.2.6 和定理 7.2.7 的估计结果, 可得

$$|g(x)|\leqslant\text{const}\left[\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^\infty|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x|f(\xi)|\mathrm{e}^{\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^\infty|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\right],$$

$$|g'(x)|\leqslant\text{const}\left[\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^\infty|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x|f(\xi)|\mathrm{e}^{\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^\infty|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\right].$$

当 $x\to\infty$ 时, 上两式中第一项 $\mathrm{e}^{-\tau x}\displaystyle\int_0^\infty|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\to0$. 又由于 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可积, 所以第三项

$$\mathrm{e}^{\tau x}\int_x^\infty|f(\xi)|\mathrm{e}^{-\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi\leqslant\int_x^\infty|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\to0.$$

对于第二项, 因为

$$\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^x|f(\xi)|\mathrm{e}^{\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{-\tau x}\int_0^{\frac{x}{2}}|f(\xi)|\mathrm{e}^{\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{-\tau x}\int_{\frac{x}{2}}^x|f(\xi)|\mathrm{e}^{\tau\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau x}\int_0^\infty|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\int_{\frac{x}{2}}^x|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\to0,$$

所以, $g(x) \to 0$, $g'(x) \to 0$. □

令

$$K_0(x,\xi,\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tilde{y}(x,s)\ \tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\ \mathrm{d}s,$$

则有下列结论.

引理 7.6.4 如果微分算式 (7.6.1) 及边条件 (7.6.2) 满足 7.4 节中的基本条件 (1) 和条件 (2), 固定复数 $\lambda \in \rho(L_\theta)$, 则对 $0 \leqslant x, \xi < \infty$,

$$|K_0(x,\xi,\lambda)| \leqslant c,$$

其中, c 不依赖于 x 和 ξ.

证明 由定理 7.6.2 证明中第一个不等式 (7.6.7) 可直接得到. □

定理 7.6.5 若定理 7.6.2 的条件均满足, 则任意的 $g(x) \in E_\theta$ 都能够表示为

$$g(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k y_k(x)}{\displaystyle\int_0^\infty y_k^2(x)\mathrm{d}x} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha(s)\tilde{y}(x,s)}{A(s)\tilde{A}(s)}\ \mathrm{d}s, \tag{7.6.9}$$

其中, $\alpha_k = \displaystyle\int_0^\infty g(x)y_k(x)\mathrm{d}x$, $\alpha(s) = \displaystyle\int_0^\infty g(x)\tilde{y}(x,s)\mathrm{d}x$. 式 (7.6.9) 中的积分关于 x 在区间 $0 \leqslant x < \infty$ 上绝对且一致收敛.

证明 先固定 $\lambda \in \rho(L_\theta)$, 设 $f(x) = (L_\theta - \lambda I)g$, 则

$$g(x) = \int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

根据定理 7.6.2 可知

$$\begin{aligned} g(x) = &\sum_{k=1}^{r} \frac{y_k(x)y_k(\xi)}{(\lambda_k-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty y_k^2(x)\mathrm{d}x}\int_0^\infty f(x)y_k(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(\xi)\int_0^\infty \frac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{7.6.10}$$

及

$$\begin{aligned} \int_0^\beta f(\xi)y_k(\xi)\ \mathrm{d}\xi &= \int_0^\beta (L_\theta - \lambda I)g(\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^\beta (l(y)-\lambda y)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= [gy_k' - g'y_k]_0^\beta + \int_0^\beta (l(y_k)-\lambda y_k)g(\xi)\ \mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

又

$$g'(0)=\theta g(0),\quad y_k'(0)=\theta y_k(0).$$

且当 $x\to\infty$ 时, $g(x),g'(x)\to 0$ $(k=1,2,\cdots,r)$, 所以,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(\xi)y_k(\xi)\ \mathrm{d}\xi&=(\lambda_k-\lambda)\int_0^\infty g(\xi)y_k(\xi)\ \mathrm{d}\xi\\&=(\lambda_k-\lambda)\alpha_k,\quad k=1,2,\cdots,r,\end{aligned}\tag{7.6.11}$$

因此, 式 (7.6.10) 中的第一项为

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{y_k(x)y_k(\xi)}{(\lambda_k-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty y_k^2(x)\mathrm{d}x}.$$

再考察式 (7.6.10) 中的第二项. 由定理 7.6.2 中对式 (7.6.7) 的估计及 $f(x)$ 的可积性可知, 函数 $\dfrac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)}\cdot\dfrac{1}{A(s)\ \tilde{A}(s)}f(\xi)$ 在 $0\leqslant s,\xi<\infty$ 上绝对可积, 从而式 (7.6.10) 中的第二项可交换积分次序, 于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(\xi)\int_0^\infty\frac{\tilde{y}(x,s)\tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}\xi\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\tilde{y}(x,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\int_0^\infty\tilde{y}(\xi,s)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{7.6.12}$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_0^\beta f(\xi)\tilde{y}(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi&=\int_0^\beta(l(y)-\lambda y)\tilde{y}(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi\\&=\int_0^\beta(l(\tilde{y})-\lambda\tilde{y})g(\xi)\ \mathrm{d}\xi+[g\tilde{y}'(\xi,s)-g'\tilde{y}(\xi,s)]_0^\beta,\end{aligned}$$

及 $g'(0)=\theta g(0)$, $\tilde{y}'(0)=\theta y(0,\lambda)$, 且当 $x\to\infty$ 时, $g'(x),g(x)\to 0$, 所以,

$$\int_0^\infty f(\xi)\tilde{y}(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi=(s^2-\lambda)\int_0^\infty g(\xi)\tilde{y}(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi=(s^2-\lambda)\alpha(s).\tag{7.6.13}$$

把式 (7.6.11)~ 式 (7.6.13) 代入式 (7.6.10) 便得式 (7.6.9).

最后证式 (7.6.9) 中的积分关于 x $(0\leqslant x<\infty)$ 是一致收敛的.

当 s 充分大时, 函数 $\dfrac{1}{s}\tilde{y}(x,s)$ 关于 x,s 在 $(0\leqslant x<\infty)$ 上是有界的, 即 $\dfrac{1}{s}|\tilde{y}(x,s)|\leqslant\text{const}$, 从而

$$\frac{1}{s}\left|\int_0^\infty f(\xi)\tilde{y}(\xi,s)\ \mathrm{d}\xi\right|\leqslant\text{const}\int_0^\infty|f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi=\text{const}.$$

所以, 对充分大的 s, $|\alpha(s)| \leqslant \dfrac{\text{const}}{s}$. 再由 $A(s)$ 和 $\tilde{A}(s)$ 的估计可知, $\dfrac{1}{s}|A(s)| \geqslant \text{const}$, $\dfrac{1}{s}|\tilde{A}(s)| \geqslant \text{const}$. 因此, 对充分大的 s, 式 (7.6.9) 中的积分值对所有的 x $(0 \leqslant x < \infty)$ 都不会超过 $\dfrac{\text{const}}{s^2}$. 所以, 该积分一致收敛. □

定理 7.6.6 (Parseval 等式) 若定理 7.6.2 的条件均满足, 则对任意的 $g(x) \in E_\theta$, 及 $[0,\infty)$ 上的任意可积函数 $h(x)$, 积分 $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\ h(x)\mathrm{d}x$ 都绝对收敛, 且

$$\int_0^\infty g(x)\ h(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k\ \beta_k}{\displaystyle\int_0^\infty y_k^2(x)\mathrm{d}x} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha(s)\ \beta(s)}{A(s)\ \tilde{A}(s)}\ \mathrm{d}s, \tag{7.6.14}$$

其中,

$$\alpha_k = \int_0^\infty g(x)\ y_k(x)\mathrm{d}x, \quad \beta_k = \int_0^\infty h(x)\ y_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\alpha(s) = \int_0^\infty g(x)\ \tilde{y}(x,s)\mathrm{d}x, \quad \beta(s) = \int_0^\infty h(x)\ \tilde{y}(x,s)\mathrm{d}x.$$

而且式 (7.6.14) 中右端的积分是绝对收敛的.

证明 式 (7.6.14) 右边第二项积分的绝对收敛性由定理 7.6.5 的绝对收敛性, 及对充分大的 s 有

$$\frac{1}{s}|\beta(x)| \leqslant \text{const}\int_0^\infty |h(x)|\mathrm{d}x = \text{const}$$

便可得. 所以, $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\ h(x)\mathrm{d}x$ 也绝对收敛. 式 (7.6.9) 两边乘以 $h(x)$ 并在 $[0,\infty)$ 上积分, 就得到式 (7.6.14). □

类似定理 7.6.2 可以得到特征值不是单重特征值时相应的特征展开, 根据 7.3.2 小节讨论可知 L_θ 的预解算子的核 $K(x,\xi,\lambda)$ $(\lambda = s^2)$ 为

$$K(x,\xi,s) = \begin{cases} \dfrac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_1(\xi,s) - \dfrac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_2(\xi,s), & \xi < x, \\ \dfrac{\psi(s)}{2\mathrm{i}s}y_1(x,s)y_1(\xi,s) - \dfrac{1}{2\mathrm{i}s}y_1(\xi,s)y_2(x,s), & \xi > x, \end{cases} \tag{7.6.15}$$

其中,

$$\psi(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad A(s) = y_1'(0,s) - \theta y_1(0,s), \quad B(s) = y_2'(0,s) - \theta y_2(0,s).$$

设 $\lambda_0 = s_0^2$ $(\Im s_0 > 0)$ 是 L_θ 的 m 重 (代数重数) 特征值, 根据定理 7.5.5 可知, λ_0 的解析重数也是 m, 即 s_0 是 $K(x,\xi,s)$ 的 m 重极点, 也就是 $A(s)$ 的 m 重零点,

因而 λ_0 也是 $\psi(\sqrt{\lambda})$ 的 m 重极点, 于是 $\psi(\sqrt{\lambda})$ 在 λ_0 的邻域内可展开为

$$\psi(\sqrt{\lambda})=\frac{c_m}{(\lambda-\lambda_0)^m}+\frac{c_{m-1}}{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_1}{\lambda-\lambda_0}+\alpha_0+\alpha_1(\lambda-\lambda_0)+\cdots. \tag{7.6.16}$$

又因为 $y_1(x,\sqrt{\lambda})$ 在 $\lambda_0=s_0^2$ 的某一个邻域内解析, 所以

$$y_1(x,\sqrt{\lambda})=y(x)+y_1(x)(\lambda-\lambda_0)+\cdots+y_{m-1}(x)(\lambda-\lambda_0)^{m-1}+\cdots. \tag{7.6.17}$$

把式 (7.6.16) 和式 (7.6.17) 代入式 (7.6.15) 可以得到下述引理.

引理 7.6.7　$\forall\lambda\in\rho(L_\theta)$, L_θ 的预解算子 $(\lambda I-L_\theta)^{-1}$ 的核 $K(x,\xi,\lambda)$ 在 λ_0 的某一邻域内有 Laurent 展式

$$K(x,\xi,\lambda)=\sum_{q=1}^{m}\frac{\alpha_q(x,\xi)}{(\lambda-\lambda_0)^q}+\cdots, \tag{7.6.18}$$

其中,

$$\alpha_q(x,\xi)=\sum_{j=0}^{m-q}c_{j+q}\sum_{v=0}^{j}y_v(x)\,y_{j-v}(\xi),\quad y_0(x)=y(x).$$

显然, $y(x)=y_1(x,s)$ 是算子 L_θ 对应于特征值 $\lambda_0=s_0^2$ 的特征函数. 又由于 $l(y_1)-\lambda y_1=0$, 这里 $y_1=y_1(x,\sqrt{\lambda})$, 所以,

$$\begin{aligned}0=&\,l(y_1)-\lambda y_1=l(y)+(\lambda-\lambda_0)l(y_2)+\cdots+(\lambda-\lambda_0)^{m-1}l(y_{m-1})+\cdots\\&-\lambda y-\lambda(\lambda-\lambda_0)y_1-\lambda(\lambda-\lambda_0)^2l(y_2)+\cdots+\lambda(\lambda-\lambda_0)^{m-1}y_{m-1}+\cdots,\end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases}l(y)-\lambda_0y=0,\\l(y_1)-\lambda_0y_1=y,\\l(y_2)-\lambda_0y_2=y_1,\\\cdots\cdots\\l(y_{m-1})-\lambda_0y_{m-1}=y_{m-2}\end{cases} \tag{7.6.19}$$

由于 λ_0 是 $A(s)$ 的 m 重根, 所以,

$$\begin{aligned}A(\sqrt{\lambda})=&\,y'(0)+y_1'(0)(\lambda-\lambda_0)+\cdots+y_{m-1}'(0)(\lambda-\lambda_0)^{m-1}+\cdots\\&-\theta\left(y(0)+y_1(0)(\lambda-\lambda_0)+\cdots+y_{m-1}(0)(\lambda-\lambda_0)^{m-1}+\cdots\right),\end{aligned}$$

于是

$$0=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(A(\sqrt{\lambda})\right)_{\lambda=\lambda_0}=y_1'(0)-\theta y_1(0),$$

$$
0=\frac{1}{2!}\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(A(\sqrt{\lambda})\right)_{\lambda=\lambda_0}=y_2'(0)-\theta y_2(0),
$$
$$\cdots\cdots$$
$$
0=\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}\left(A(\sqrt{\lambda})\right)_{\lambda=\lambda_0}=y_{m-1}'(0)-\theta y_{m-1}(0).
$$

由此可知, $y(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_{m-1}(x)$ 均满足边条件 (7.6.2) 并且属于 $L^2(0,\infty)$, 故

$$
\operatorname{span}\{y(x),y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{m-1}(x)\}
$$

是对应于特征值 $\lambda_0=s_0^2$ 的根子空间 (特征函数及其相关函数).

下面来确定 $\alpha_q(x,\xi)$ 中的系数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$. $\forall\lambda\in\rho(L_\theta)$, $R_\lambda=(L_\theta-\lambda I)^{-1}$. 根据式 (7.6.19) 可知, $R_\lambda y_k$ 具有形式

$$
R_\lambda y_k=\alpha y+\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ky_k.
$$

两边用 $L_\theta-\lambda I$ 再作用得到

$$
\begin{aligned}
y_k=&\alpha(\lambda_0-\lambda)y+\alpha_1[(\lambda_0-\lambda)y_1+y]+\alpha_2[(\lambda_0-\lambda)y_2+y_1]\\
&+\cdots+\alpha_k[(\lambda_0-\lambda)y_k+y_{k-1}].
\end{aligned}
$$

由于 $y(x),y_1(x),y_2(x),\cdots,y_k(x)$ 线性无关, 所以,

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\lambda_0-\lambda)+\alpha_1=0,\quad \alpha_1(\lambda_0-\lambda)+\alpha_2=0,\cdots,\\
&\alpha_{k-1}(\lambda_0-\lambda)+\alpha_k=0,\quad 1=\alpha_k(\lambda_0-\lambda).
\end{aligned}
$$

从而

$$
\alpha_k=\frac{1}{\lambda_0-\lambda},\quad \alpha_{k-1}=\frac{-1}{(\lambda_0-\lambda)^2},\quad \alpha_{k-2}=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^3},\cdots,
$$
$$
\alpha_1=\frac{(-1)^{k-1}}{(\lambda_0-\lambda)^k},\quad \alpha=\frac{(-1)^k}{(\lambda_0-\lambda)^{k+1}},
$$

即有

$$
R_\lambda y_k=-\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}y-\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^k}y_1-\cdots-\frac{1}{\lambda-\lambda_0}y_k. \tag{7.6.20}
$$

根据式 (7.6.18) 可知

$$
R_\lambda y_k=\int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)y_k(\xi)\ \mathrm{d}\xi=\sum_{q=1}^m\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^q}\int_0^\infty\alpha_q(x,\xi)y_k(\xi)\ \mathrm{d}\xi+\cdots.
$$

与式 (7.6.20) 比较可得

$$\int_0^{\infty} \alpha_q(x,\xi)y_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & q > k+1, \\ -y_{k+1-q}(x), & q \leqslant k+1. \end{cases}$$

记 $\alpha_{kl} = \int_0^{\infty} y_k(\xi)y_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, 另外, 根据式 (7.6.18) 中 $\alpha_q(x,\xi)$ 的表示可知

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \alpha_q(x,\xi)y_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \sum_{j=0}^{m-q} c_{j+q} \sum_{v=0}^{j} y_v(x) \int_0^{\infty} y_{j-v}(\xi)y_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{j=0}^{m-q} c_{j+q} \sum_{v=0}^{j} \alpha_{j-v,k}y_v(x).\end{aligned}$$

结合上两式, 并注意到 $y(x), y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{m-1}(x)$ 的线性独立性就有

$$\sum_{j=0}^{m-q} c_{j+q} \sum_{v=0}^{j} \alpha_{j-v,k} = \begin{cases} 0, & q > k+1, \\ 0, & q \leqslant k+1,\ v \neq k+1-q, \\ -1, & q \leqslant k+1,\ v = k+1-q. \end{cases}$$

令 $j - v = l,\ v + q = \mu$, 则

$$\sum_{l=0}^{m-\mu} c_{\mu+l}\ \alpha_{l,k} = \begin{cases} 0, & \mu \neq k+1, \\ -1, & \mu = k+1. \end{cases} \tag{7.6.21}$$

取 $\mu = m$, $\alpha_{0,k} = \int_0^{\infty} y(\xi)y_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0\ (k < m-1)$, $c_m\alpha_{0,m-1} = -1$. 则

$$c_m = -\frac{1}{\alpha_{0,m-1}} = -\frac{1}{\displaystyle\int_0^{\infty} y(\xi)y_{m-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}.$$

再取 $\mu = m-1$, $c_{m-1}\alpha_{0,k} + c_m\alpha_{1,k} = \begin{cases} 0, & k \neq m-2, \\ -1, & k = m-2, \end{cases}$ 则有 $\alpha_{1,k} = 0\ (k < m-2)$, 且

$$c_m\ \alpha_{1,m-2} = -1. \tag{7.6.22}$$

比较式 (7.6.21) 与式 (7.6.22) 可得 $\alpha_{0,m-1} = \alpha_{1,m-2}$. 反复上述步骤就有

$$\alpha_{k,l} = \int_0^{\infty} y_k(\xi)y_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad k+l < m-1,$$

$$\alpha_{k,l} = \int_0^{\infty} y_k(\xi)y_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} y_{k+1}(\xi)y_{l-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \alpha_{k+1,l-1}.$$

在式 (7.6.21) 中, 依次令 $\mu = m, m-1, m-2, \cdots$ 及 $k = m-1$, 得

$$\begin{cases} c_m\ \alpha_{0,m-1} = -1 \\ c_m\ \alpha_{1,m-1} + c_{m-1}\ \alpha_{0,m-1} = 0 \\ c_m\ \alpha_{2,m-1} + c_{m-1}\ \alpha_{1,m-1} + c_{m-2}\ \alpha_{0,m-1} = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_m\ \alpha_{m-1,m-1} + c_{m-1}\ \alpha_{m-2,m-1} + \cdots + c_1\ \alpha_{0,m-1} = 0 \end{cases} \tag{7.6.23}$$

由方程组 (7.6.23) 便可解得系数 c_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

定理 7.6.8 若方程 (7.6.1) 和边条件 (7.6.2) 中的 $p(x)$ 及 θ 满足定理 7.6.2 的基本条件, $\lambda_1 = s_1^2$, $\lambda_2 = s_2^2$, $\cdots$, $\lambda_r = s_r^2$ $(\Im s_r > 0)$ 是 L_θ 的特征值, 即为 $A(s)$ 的零点, 重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_r$, 对应于 λ_k 的根子空间系为 $\{y_{0,k}(x), y_{1,k}(x), y_{2,k}(x), \cdots, y_{m_k-1,k}(x)\}$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$, 则 $\forall\lambda \in \rho(L_\theta)$,

$$K(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{q=1}^{m_k} \frac{\alpha_{qk}(x,\xi)}{(\lambda-\lambda_k)^q} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tilde{y}(x,s)\ \tilde{y}(\xi,s)}{(s^2-\lambda)A(s)\tilde{A}(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{7.6.24}$$

其中, $\alpha_{q,k}(x,\xi) = \sum\limits_{j=0}^{m_k-q} c_{j+q,k} \sum\limits_{v=0}^{j} y_{v,k}(x) y_{j-v,k}(\xi)$, $c_{m_k,k}, c_{m_k-1,k}, \cdots, c_{1,k}$ $(k=1, 2, \cdots, r)$ 是由方程组 (7.6.23) 所确定. 式 (7.6.24) 右端的积分关于 x, ξ 在区域 $0 \leqslant x, \xi < \infty$ 上是一致收敛的.

证明 结合上面结论类似定理 7.6.2 的证明可得. □

7.7 具有谱奇异点的微分算子

我们仍然在区间 $[0, \infty)$ 上研究由微分算式

$$l(y) = -y'' + p(x)y$$

和边条件

$$y'(0) - \theta y(0) = 0$$

在 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上生成的微分算子 L_θ, 其中, $p(x)$ 是复值函数且满足

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\varepsilon x}|p(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

设 $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), y_3(x,\lambda)$ 是 7.2 节中定义的 $l(y) = \lambda y$ 的解. $y_1(x,s) = y_3(x,s)$, 而且

$$y_1(x,s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xs} - \int_x^\infty \frac{\sin(x-t)s}{s} p(t) y_1(t,s)\,\mathrm{d}t,$$

也可以表示为

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}+\int_x^{\infty}K(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t,$$

则

$$|K(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\exp\left(\int_x^{\infty}\xi|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right)\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}|p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi,$$

即

$$|K(x,t)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}(x+t)}.$$

定义 7.7.1　解析函数 $f(\lambda)$ 称为是指数型的 (exponential type), 若 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$,

$$|f(\lambda)|\leqslant c(\delta)\mathrm{e}^{\delta|\lambda|},\tag{7.7.1}$$

其中, δ 是常数, $c(\delta)$ 是依赖于 δ 的常数, 使式 (7.7.1) 成立的最大下界 δ 称为函数 $f(\lambda)$ 的阶数 (degree). $f(\lambda)$ 称为是阶数不超过 (或等于) δ 的指数型解析函数.

所以, $K(x,t)$ 是阶数不超过 $-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的指数型函数.

我们仍然令

$$A(s)=y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s).\tag{7.7.2}$$

根据 7.4 节的讨论可知, 算子 L_θ 的谱是由点谱 (特征值)$\lambda_1=s_1^2$, $\lambda_2=s_2^2$, $\cdots$, $\lambda_r=s_r^2$ 和充满整个实轴 $(\lambda\geqslant 0)$ 的连续谱组成. $s_1,\cdots,s_r$ 在 s 平面的上半平面 $(\Im s>0)$. 如果 $A(s)=0$ 在实轴上有根 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\rho$, 即 $A(\delta_i)=0\ \ (i=1,\cdots,\rho)$, 则 $\tilde\lambda_1=\delta_1^2>0,\cdots,\tilde\lambda_\rho=\delta_\rho^2>0$ 属于 L_θ 的连续谱.

定义 7.7.2　称 $A(s)=0$ 在实轴上的零点的平方为算子 L_θ 的谱奇异点 (spectral singularity), 即 $\tilde\lambda_1,\cdots,\tilde\lambda_\rho$ 是 L_θ 的谱奇异点.

参 考 文 献

[1] Akhiezer N I, Glazman I M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space [M]. NewYork: Dover. 1993.

[2] Atkinson F V. Limit-n criteria of integral type [J]. Pro. Royal Soc. Edinburgh A, 1974/75, 73: 167–198.

[3] Cao X, Wang Z, Wu H. On the boundary conditions in self-adjoint multi-interval Sturm-Liouville problems [J]. Linear Algebra Appl., 2009, 430(11–12): 2877–2889.

[4] Cao X, Wu H. Geomtric aspects of high-order eigenvalue problems I. structures on spaces of boundary conditions [J]. International J. Math. and Math. sciences, 2004, 13: 647–678.

[5] Cao Z. On self-adjoint domains of 2-nd order differential operators in limit-circle case [J]. Acta Math. Sinica, New Series, 1985, 1(3): 175–180.

[6] 曹之江. 高阶极限圆型微分算子的自伴扩张 [J]. 数学学报, 1985, 28(2), 205-217.

[7] 曹之江. 常微分算子 [M]. 上海: 上海科学技术出版社. 1987.

[8] 曹之江. 自伴常微分算子的解析描述 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1987, 18(3): 393–401.

[9] 曹之江. 经典 Sturm-Liouville 理论的完备和衍生 [J]. 数学进展, 1993, 22(02): 97–117.

[10] 曹之江, 刘景麟. 奇异对称常微分算子的亏指数理论 [J]. 数学进展, 1983, 12(03): 161–178.

[11] 曹之江, 孙炯. 拟导数所定义的自伴算子 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1986, 17: 7–15.

[12] 曹之江, 孙炯. 微分算子文集 [M]. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1992.

[13] 曹之江, 孙炯. Edmunds D E. 二阶微分算子积的自伴性 [J]. 数学学报, 1999, 15(3): 375–386.

[14] Codding E, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations[M]. New York: Springer, 1955.

[15] Courant T, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics[M]. I, II. New York: Interscience Publishing, 1953.

[16] Dowson H R. Spectral Theory of Linear Operators[M]. London: Academic Press, 1978.

[17] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators, Part II[M]. New York: Interscience Publishing, 1963.

[18] Eastham M S P, Kalf H. Schrödinger-Type Operators with Continuous Spectra[M]. Boston: Pitman Adv. Publishing, 1982.

[19] Eastham M S P, Kong Q, Wu H, et al. Inequalities among eigenvalues of Sturm-Liouville problems [J]. J. Inequalities & Appl., 1999, 3: 25–43.

[20] Edmunds D E, Evans W D. Spectral Theory and Differential Operators[M]. Oxford: Oxford University Press, 1987.

[21] Edmunds D E, Sun J. Approximation and entropy numbers of Sobolev embedding over domains with finite measure [J]. Ouart. J. Math. Oxford, 1990, 41: 385–394.

[22] Edmunds D E, Kufner A, Sun J. Extension of functions on weighted Sobolev spaces [J], Rend. Accad. Naz. XL Mem. Mat., 1990, 16(17): 327–339.

[23] Edmunds D E, Sun J. Approximation and entropy numbers of Sobolev embedding in weighted Orlicz spaces [J]. Mathematica Bohemica, 1991, 116(3): 281–295.

[24] Edmunds D E, Sun J. Embedding theorems and the spectra of certain differential operators [J], Proc. R. Soc. Lond. A, 1991, 434: 643–656.

[25] EI-Sayed Ibrahim S. The point spectra and regularity fields of non-self-adjoint quasi-differential operators [J], Roc. Mount. J. Math., 1995, 25: 685–699.

[26] EI-Sayed Ibrahim S. Singular non-selfadjoint differential operators [J], Proc. Royal soc. Edinburgh A, 1994, 124: 825–841.

[27] Evans W D. On limit-point and Dirichlet-type results for second-order differential expressions [M]// Everitt W N. Ordinary and Partial Differential Equations. New York: Springer, 1976: 78–92.

[28] Evans W D, Knowles I. On the extension problem for accretive differential operators [J], J. Funct. Anal, 1985, 63: 276–298.

[29] Everitt W N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910–1976 [M]//Berg G, et al. Differential Equations, Proceeding from the Uppsala 1977 International Conference on Differential Equations. Virginia: Universitas Upsaliersis, 1977: 62–81

[30] Everitt W N. Self-adjoint boundary value problems on intervals [J]. J. London Math. Soc., 1962, 37: 372–384.

[31] Everitt W N, Giertz M. On some properties of the powers of a formally self-adjoint differential expression [J], Proc. London Math. Soc, 1972, 24: 149–170.

[32] Everitt W N, Littlejohn L L, Wellman R. The symmetric form of the Koekoeks' laguerre type differential equation [J]. J. Comput. Appl. Math., 1995, 57(1): 115–121.

[33] Everitt W N, Markus L. The Glazman-Krein-Naimark theorem for ordinary differential operators, new results in operator theory and its applications [J]. Oper. Theory Adv. Appl., 1997, 98: 118–130.

[34] Everitt W N, Race D. Some remarks on linear ordinary quasi-differential expressions [J]. Proc. London Math. Soc., 1987, 54: 300–320.

[35] Faierman M. Eigenvalue asymptotics for a non-selfadjoint elliptic problem involving an indefinite weigh [J]. Rocky Mountain J. Math., 1995, 25: 179–187.

[36] Fleckinger J. Estimate of the number of eigenvalue for an operator of Schrödinger type [J]. Proc. Royal soc. Edinburgh A, 1981, 89: 355–361.

[37] Friedrichs K O. Spectral Theory of Operators in Hilbert Spaces[M]. New York: Springer-verlag, 1973.

[38] Friedrichs K O. Spektraltheorie halbbeschrnkter operatoren und anwendung auf die spektralzerlegung von differetialoperatoren [J]. Math. Ann., 1934, 109: 465–487.

[39] Friedrichs K O. Criteria for the discrete character of the spectra of the ordinary differential operators [M]// Studies and Essays Presented to R. Courant. New York: Interscience Publishers, 1948: 145–160.

[40] Friedrichs K O. On the perturbation of continuous spectra [J]. Comm. Pure. And Appl. Math., 1948, 1: 361–406.

[41] Friedrichs K O. Criteria for the discrete spectra [J]. Comm. Pure. And Appl. Math., 1950, 3: 439–449.

[42] Fulton C T, Pruess S A. Eigenvalue and eigenfunction asymptotic for regular Sturm-Liouville problems [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, 188: 297–340.

[43] Fu S Z. On the self-adjoint extensions of symmetric ordinary differential operators in direct sum spaces [J]. J. Diff. Equa., 1992, 100(2): 269–291.

[44] 傅守忠, 王忠. 复系数 Euler 微分算子的谱是离散的一个充分条件 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1998, 29: 459–464.

[45] 傅守忠, 王忠. 关于扩展 Cantor 维数 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1999, 30(6): 688–691.

[46] Fu S, Wang Z. Relationship of multiplicities of a differential operator's eigenvalue. to appear.

[47] Galindo A. On the extensionce of J-self-adjoint extensions of J-symmetric operators with adjoint [J]. Comm. Pur. Appl. Math., 1962, 15: 423–425.

[48] 高鹏飞, 王忠. J-自伴 Euler 微分算子谱的离散性 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2001. 32(1): 6–12.

[49] 高云兰, 王忠. 两端奇异的左定 Sturm-Liouville 问题的谱函数与 Weyl 函数 [J]. 内蒙古大学学报, 2003, 34(1): 10–16.

[50] Gao Y, Wang Z, Wu H. Large limits of eigenvalues of left-definite Sturm-Liouville problems when interval shrinks to an end point[J], Pacific J. App. Math., 2010, 3(1): 1–10.

[51] 高云兰, 王忠, 吴宏友. 自共轭算子束的谱及其应用 [J]. 数学年刊, 2012, 33(1): 101–112.

[52] Gao Y, Wang Z, Wu H. Left-definite boundary conditions of Sturm-Liouville problems when the interval shrinks to a point [J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese University (高校应用数学学报), 2011, 26(1): 29–37.

[53] Garcia S R. A^*-closed subalgebra of the Smirnov class [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2005, 133: 2051–2059.

[54] Garcia S R. The eigenstructure of complex symmetric operators [J]. Oper. Theory: Adv. Appl., 2008, 179: 169–184.

[55] Garcia S R, Putinar M. Complex symmetric operators and applications [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2006, 358: 1285–1315.

[56] Garcia S R, Putinar M. Complex symmetric operators and applications II [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2007, 359: 3913–3931.

[57] Gasymov M G. Expansion in terms of the solutions of a scattering theory problem for the non-self-adjoint Schrödinger equation [J]. Soviet Math. Dokl., 1968, 9: 390–393.

[58] Gasymov M G, Guseinov G S H. Some uniqueness theorems on inverse problems of spectral analysis for Sturm-Liouville operators in the Weyl's limit-circle case [J]. Differ. Uravn., 1989, 25: 588–599.

[59] Glazman I M. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators[M]. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.

[60] Glazman I M. An analogue of the extension theory of Hermitian operators and a non-symmetric one dimensional boundary-value problem on a half-axis [J]. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1957, 115: 214–216.

[61] Gohberg I C, Krein M G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators [M]. Tran. Math. Monographs, 18, American Mathematical Society, 1969.

[62] Goldstein J A. Semigroups of Linear Operators and Applications[M]. New York: Oxford University Press, 1985.

[63] Guseinov G S H, Tuncay H. The determinants of perturbation connected with a dissipative Sturm-Liouville operator [J]. J Math. Ana. App., 1995, 194: 39–49.

[64] Harris B J. The form of the spectral functions associated with a class of Sturm-Liouville equations with integral coefficient [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1987, 105: 215–227.

[65] Harris B J, Race D. Asymptotic of eigenvalues for Sturm-Liouville problems with an interior singularity [J]. J. Diff. Equa., 1995, 116: 88–118.

[66] Kamke E. Differential Gleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen [M]. Leipzig: Akademie-Verlag, 1943.

[67] Kamimura Y. A criterion for the complete continuity of the resolvent of a 2nth order differential operator with complex coefficients [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1990, 116: 161–176.

[68] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. 2nd ed. [M] New York: Springer-verlag, 1984.

[69] Kauffman R, Read T, Zettl A. The Deficiency Index Problem for Powers of Ordinary Differential Expressions[M]. Lecture Notes in Math., 621, New York: Springer, 1977.

[70] Keldysh M V. On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non self-adjoint equations [J]. Doklad. Akad. Nauk. SSSR, 1951, 77: 11–14.

[71] Kemp R R D. A singular boundary value problem for a non-self-adjoint differential operator [J]. Canad. J. Math., 1958, 10: 447–462.

[72] Kigami J, Lapidus M L. Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on P. C. F. [J]. Math. Phys., 1993, 158: 93–125.

[73] Knowles I W. On the J-selfadjoint extensions of J-symmetric operators [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 79: 42–44.

[74] Knowles I W. On the boundary conditions characterizing J-selfadjoint extensions of J-symmetric operators [J]. J. Diff. Equa., 1981, 40: 193–216.

[75] Knowles I, Race D. On the point spectra of complex Sturm-Liouville operators [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1980, 85: 263–289.

[76] Knowles I, Race D. On the correctness of boundary conditions for certain linear differential operators [J]. North-Holland Math. Studies, 1981, 55: 279–287.

[77] Kodaira K. The eigenvalue problem for ordinary differential equationsof second order and Heisenberg's theory of S-matrices [J]. Amer. J. Math., 1949, 71: 921–945.

[78] Kogan V I, Rofe-Beketov F S. On the question of the deficiency indices of differential operators with coefficients [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1975, 72(4): 281 298.

[79] Krall A M, Everitt W N, Littlejohn L L. The Laguerre type operator in a left definite Hilbert Space [J]. J. Math. Anal., 1995, 192: 460–468.

[80] Krein M G. On the indeterminate case the Sturm-Liouville boundary problems in the interval $(0, +\infty)$ [J]. Izv Akad Nuak SSSR ser. Mat., 1952, 16: 293–324.

[81] Kufner A. Weighted Sobolev Spaces[M]. New York: Wiley Sons, 1985.

[82] Lapidus M L. Spectral and fractal geometry: from the Weyl-Berry conjecture for the vibrations of fractal drums to the Riemann zeta-function [J]. Diff. Equat. Math. Phys., 1992, 186: 151–181.

[83] Lapidus M L. Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture [J]. Transact. Amer. Math. Soc., 1991, 325: 465–529.

[84] Levinson N. Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators [J]. Casopis Pest. Mat. Fys., 1949, 74: 19–20.

[85] Levendorskii S. Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Differential Operators[M]. London: Kluwer academic publishers, 1990.

[86] Levitan B M. Expansion in Eigenfunctions of Second Order Differential Equations[M]. Moskwa: GosteKhizdat, 1950.

[87] Levitan B M. The asymptotic behavior of the Green function of expansion in eigenfunctions of Schrödinger equations [J]. Mat. Sborn., 1954, 34: 145–199.

[88] Levitan B M. Inverse Sturm-Liouville Problems[M]. Utrecht: VNU Science Press, 1987.

[89] Lewis R T. The discreteness of the spectrum of self-adjoint, even, order, one-term, differential operators [J]. J. Amer. Math. Soc., 1974, 24: 480–482.

[90] 黎茨 F. 塞克佛尔维-纳吉 B. 泛函分析讲义. 第二卷. 庄万译. [M]. 北京: 科学出版社, 1980.

[91] Lidskii V B. Conditions for completeness of a system of root subspace for nonself-adjoint operators with discrete spectra [J]. Trudy Moscow. Math. Obshch, 1959, 8: 83–120. (Russian) English translations: Amer. Math. Transl., 1963, 34(2): 241–281.

[92] Lidskii V B. Conditions for the complete continuity of the resolevent of a non -self-adjoint differential operator [J]. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1957, 113: 28–31.

[93] Lidskii V B. A nonselfadjoint operator of Sturm-Liouville type with a discrete spectrum [J]. Trudy Moskov. Math. Obshch, 1960, 9: 45–79.

[94] 李嵘, 王忠. 两端奇异微分算子在极限圆情形下的特征行列式 [J], 内蒙古大学学报, 2002, 33(2): 1–5.

[95] Li Y, Sun J, Wang Z. On the complete description of self-adjoint boundary condition of the Schrödinger operator with a $\delta(x)$ or $\delta'(x)$ interaction [C]// 内蒙古数学学会第五届年会论文集及史志. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1995: 27–31.

[96] 刘景麟. 关于一类非自伴常微分算子的极限点情形于算子半群理论 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1982, 13: 361–372.

[97] 刘景麟. 关于一类非自伴算子的极限点性质 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1983, 14: 1–7.

[98] 刘景麟. 关于非自伴算子的极限点类 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 14: 9–20.

[99] 刘景麟. 关于非自伴算子的极限点类 (II)[J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1983, 14: 141–149.

[100] 刘景麟. 关于常微分算式亏指数与边值问题适定性之间的某些联系 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1983, 14: 371–381.

[101] Liu J. On the limite-point classification of a class of non-self-adjoint ordinary differential operators[J]. J. Diff. Equat., 1984, 55(2): 165–203.

[102] Liu J. On the limit-point classification of powers of a class of nonselfadjoint differential operators [J]. Ann. Diff. Eqs., 1992, 8: 323–333.

[103] 刘景麟. 关于 J-对称算子的 J-自伴延拓 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1992, 23: 312–316.

[104] 刘肖云, 王忠, 奇异 $2n$ 阶 J-自伴向量微分算子的预解算子 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2007, 38(1): 7–12.

[105] 刘肖云, 王忠, 两项自伴向量微分算子的谱是离散的充分条件 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2009, 40(2): 153–156.

[106] Liouville J, Sturm J C F. Extrait d'une méemoire sur le développement des fonctions en serie [J]. J. Math. Pures et Appl., 1837, 2: 220–223.

[107] Li W M. The higher order differential operators in direct sum spaces [J]. J. Diff. Equa., 1990, 84(2): 273–289.

[108] Locker J. Functional analysis and two-point differential operators [M]. New York: Longman Scientific and Technical, 1986.

[109] Locker J. The spectral theory of second order two point differential operators, II. asymptotic expansions and the characteristic determinant [J]. J. Diff. Equat., 1994, 114: 272–287.

[110] Locker J. The spectral theory of second order two point differential operators, I. a priori estimates for the eigenvalues and completeness [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1992, 121: 279–301.

[111] Locker J. The spectral theory of second order two point differential operators, IV. the associated projections and the subspace [J]. Rocky Mountain J. Math., 1996, 26: 1473–1498.

[112] Locker J. The spectral theory of second order two point differential operators, III. the eigenvalues and their asymptotic formulas [J]. Rocky Mountain J. Math., 1996, 26: 679–706.

[113] Marcenko V A. Expansion in eigenfuctions of non-self-adjoint singular differential operators of second order [J]. Amer. Math. Soc. Transl., 1963, 25(2): 77–130.

[114] Marini M, Zezza P. On the asymptotic behavior of the solution of a class second order linear differential equations [J]. J. diff. Equat., 1978, 28: 1–17.

[115] Mcleod J B. On the distribution of eigenvalues for an n-th order equations [J]. Quart. J. Math. Oxford, 1966, 17: 112–131.

[116] Mcleod J B. The number of integrable-square solutions of ordinary differential equations [J]. Quart. J. Math. Oxford, 1966, 17: 285–290.

[117] McLeod J B. Eigenfunction expansions associated with a complex differential operator of second order [J]. Quart. J. Math. Oxford Second Series, 1961, 12: 291–303.

[118] McLeod J B. Square-integrable solutions of a second-order differential equation with complex coefficients [J]. Quart. J. Math. Oxford Second Series, 1961, 13: 129–133.

[119] Mercer A McD. A class of bi-orthogonal expansions arising from the Sturm-Liouville equations [J]. Quart. J. Math. Oxford, 1967, 18: 207–217.

[120] Mingarelli A B. A survey of the regular weighted Sturm-Liouville problem: the non-definite case [J]. // Xiao S, Pu F, Ed. International Workshop on Applied Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1986, 109–137.

[121] Molchanov A M. The conditions for the discreteness of the spectrum of self-adjoint differential equations[J]. Trudy Moskov Mat. Obsh., 1953, 2: 169–200.

[122] Müller-Pfeiffer E. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators[M]. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1981.

[123] Müller-Pfeiffer E, Sun J. On the discrete spectrum of ordinary differential operators in weighted function spaces[J]. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 1995, 14: 637–646.

[124] 纳依玛克 M. A, 线性微分算子 [M]. 北京：科学出版社, 1964. Naimark M A. Linear Differential Operators. New York: Ungar, 1968.

[125] Race D. The theory of J-selfadjoint extensions of J-symmetric differential operators[J]. J. Diff. Equa., 1985, 57: 258–274.

[126] Race D. $m(\lambda)$-functions for complex Sturm-Liouville operators[J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1980, 86: 275–289.

[127] Race D. Trace formulas and behavior of large eigenvalues[J]. SIAM J. Math. Anal., 1995, 26: 218–237.

[128] Race D. On the location of the essential spectra and regularity fields of complex Sturm-Liouville operators[J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1980, 85: 1–14.

[129] Race D. On the essential spectra of linear $2n$th order differential operators with complex coefficients[J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1982, 92: 65–75.

[130] Race D. A note on Dirichlet-type criteria for complex Sturm-Liouville expressions[J]. J. Diff. Equa., 1990, 83: 336–347.

[131] Race D. Dirichlet-type criteria and accretiveness criteria for complex Sturm-Liouville operators[J]. Diff. Integ. Equa., 1989, 2: 144–161.

[132] Race D, Zettl A. Characterisation of the factors of quasi-differential expressions[J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh A., 1993, 123: 27–43.

[133] Raikh L M. On the extension of a J-Hermitian operator with nondense domain of definition[J]. Math. Notes, 1975, 17: 439–442.

[134] Reed M, Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional analysis[M]. New York-London: Academic Press, 1972.

[135] Reed M, Simon B. Methods of Mathematical Physics. II: Fourier Analysis, Self-adjointness[M]. New York-London: Academic Press, 1975.

[136] Reed M, Simon B. Methods of modern Mathematical Physics. III: Scattering Theory[M]. New York-London: Academic Press, 1979.

[137] Reed M, Simon B. Methods of modern Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators[M]. New York-London: Academic Press, 1972.

[138] Rellich F. Störungstheorie der spectralzerlegung[J]. Mat. Ann., 1942, 118: 462–484.

[139] Rellich F. Halbbeschränkte differentialloperatoren Hölder ordenung[J]. Proc. Inter. Congress Math., Amsterdam 1954, III: 243–250.

[140] 阮颖彬. Banach 空间上算子谱的精细划分 [J]. 福建师范大学学报 (自然科学版), 1999, 15(2): 11–15.

[141] Schechter M. Operator Methods in Quantum Mechanics[M]. New York: Elsevier North Holland, Inc., 1981.

[142] Schrödinger E, Quantisierung als eigenwertproblem[J]. Ann. D. Phys. Folge IV, 1929, 79: 631–642.

[143] Schultze B. Spectral properties of not necessarily self-adjoint linear differential operators[J]. Adv. Math., 1990, 83: 75–95.

[144] Sear D B, Titchmarsh E C. Some eigenfunction formulae[J]. Quart. J. Math. Oxford, 1950, 2: 165–175.

[145] Shang Z. On J-self-adjoint extensions of J-symmetric ordinary differential operators[J]. J. Diff. Equat., 1988, 73: 153–177.

[146] 尚在久. 关于 J-对称微分算子的 J-自伴扩张若干注记 [J]. 数学学报, 1996, 39: 387–398.

[147] 尚在久, 李文明. 关于 J-对称微分算子的若干问题 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1991, 22: 285–294.

[148] Shi D, Huang Z. Relationship of multiplicities of a high-order ordinary differential operator eigenvalue[J]. Acta Math. Sinica, Chinese Series, 2010, 53: 763–772.

[149] Sims A R. Secondary conditions for linear differential operators of the second order[J]. J. Math. Mech., 1957, 6: 247–285.

[150] Stone M H. Linear Transformations in Hilbert Space[M]. New York: American Mathematical Society, 1932.

[151] Sturm J C F. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre[J]. J. Math. Pures et Appl., 1836, 1: 106–186.

[152] Sturm J C F. Mémoire sur une classe d'équations différentielles partielles[J]. J. Math. Pures et Appl., 1837, 2: 373–444.

[153] Sun Jiong. On the self-adjoint extensions of symmetric ordinary differential operators with middle deficiency indices[J]. Acta Math. Sinica, New Series, 1986, 2(2): 152–167.

[154] Sun J. On the spectrum of a class of differential operators and embedding theorems[J]. Acta Math. Sinica, New Series, 1994, 4: 415–427.

[155] Sun J. An J Y. On the self-adjointness of the product of two $2n$-th order differential operators on $[0,+\infty)$ [J]. Diff. Ann., 1998, 1: 793–802.

[156] 孙炯, 王忠. 常微分算子谱的定性分析 [J]. 数学进展, 1995, 24: 406–422.

[157] 孙炯, 王忠. 线性算子的谱分析 [M]. 北京：科学出版社, 2005.

[158] 谭福贵, 王忠. 常系数 J-自伴微分算子的本质谱 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2001, 32(6): 612–615.

[159] Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis (second edition) [M]. New York: Chichester Brsbane Toronto, 1979.

[160] Titchmarsh E C. Eigenfunctions Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Part I[M]. Oxford: Clarendon Press, 1946.

[161] Titchmarsh E C. On the discreteness of the spectrum associated with certain differential equations[J], Ann. De. Mat., 1948, 28: 141–147.

[162] Titchmarsh E C. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, Part II[M]. Oxford: Clarendon Press, 1958.

[163] Tirebed H. Höhere Analysis[M]. Berlin: G. J. Göschen, 1901.

[164] Wang G, Wang Z, Wu H. Relations among eigenvalues of Sturm-Liouville problems with different types of leading coefficient functions [J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 336: 1061–1072.

[165] Wang G, Wang Z, Wu H. Computing the indices of sturm-liouville eigenvalues for coupled boundary conditions (the EIGENIND-SLP codes)[J]. J. Comput. App. Math., 2008, 220(1–2): 490–507.

[166] 王忠. 二阶 Volterra-Stieljes 右定积微分方程边值问题 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1990, 21: 211–219.

[167] 王忠. 两端奇异的 Sturm-Liouville 算子的谱与谱矩阵 [J]. 内蒙古民族师范学院学报, 1991, 2: 7–15.

[168] 王忠. 左定 Sturm-Liouville 微分方程边值问题 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1992, 23: 325–331.

[169] 王忠. 奇异左定 Sturm-Liouville 问题的谱函数与 Weyl 函数 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1994, 25: 253–259.

[170] 王忠. 广义微分算子极限点的判定 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1995, 26: 652–657.

[171] 王忠. $2n$ 阶复系数微分算子的谱是离散的一个充分条件 [J]. 内蒙古大学学报 (自科学版), 1997, 28: 305–307.

[172] 王忠. 高阶微分算子的谱是离散的一个充分必要条件 [J]. 系统科学与数学学报, 2000, 20(2): 224–227.

[173] 王忠. 复系数 $2n$ 阶微分算子的谱 [J]. 数学学报, 2000, 43(5): 789–796.

[174] 王忠. 复系数 Euler 微分算子的本质谱 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1998, 29: 24–30.

[175] Wang Z. On the discrete spectrum of differential operators[J]. 数学学报, 2001, 44(1): 95–102.

[176] 王忠. 具有可积系数 J-对称微分算子的亏指数 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1998, 29: 606–614.

[177] 王忠. 向量值 J-自伴算子边条件的 Calkin 描述 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1998, 29: 597–599.

[178] 王忠, 傅守忠. 向量值 J-对称算子的 J-自伴延拓 [J]. 内蒙古工业大学学报 (自然科学版), 1999, 18(1): 10–14.

[179] 王忠. 具有可积系数的二阶 J-自伴微分算子的谱 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1998, 29(6): 740–745.

[180] 王忠. 一项 J-自伴微分算子的谱是离散的充分条件 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1998, 29(6): 753–755.

[181] 王忠. 非自伴微分算子谱的定性分析 [D]. 内蒙古大学博士学位论文, 1999.

[182] 王忠. 复系数 $2n$ 阶微分算子的谱 [J]. 数学学报, 2000, 43(5): 787–796.

[183] 王忠. J-自伴 Euler 微分算子谱的离散性注记 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2001, 32(3): 245–248.

[184] Wang Z. The discreteness of the spectrum of $2n$-order one-term J-self-adjoint differential operators[J]. 肇庆学院学报 (自然科学版), 2001(2): 1–4.

[185] 王忠. Euler 微分算子谱是离散性的充分必要条件 [J]. 系统科学与数学, 2001, 21(4): 497–506.

[186] 王忠. 常系数 J-自伴 Euler 微分算子的本质谱 [J]. 内蒙古大学学报, 2004, 35(6): 607–610.

[187] 王忠, 傅守忠. 向量值 J-自伴微分算子自伴扩张 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1999, 30(4): 439–442.

[188] 王忠, 孙国臣. 高阶自伴微分算子谱的离散性 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2001, 32(2): 125–130.

[189] 王忠, 孙炯. J-对称微分算子的亏指数 [J]. 数学学报, 2000, 43(3): 481–486.

[190] 王忠, 孙炯. 一类微分算子谱的离散性 [J]. 数学学报, 2001, 44(1): 95–102.

[191] Wang Z, Sun J. The discreteness of the spectrum of second order one-term J-self-adjoint differential operators[J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2001, 32(5): 487–491.

[192] 王忠, 孙炯. J-自伴微分算子谱的定性分析 [J]. 数学进展, 2001, 30(5): 405–413.

[193] Wang Z, Sun J, Yanagawa M. The determinants of perturbation connected with Sturm-Liuville operators[J]. 内蒙古大学学报, 2003, 34(4): 365–372.

[194] 王忠, 谭福贵. 极限圆型 Sturm-Liouville 微分算子的特征行列式 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 2000, 30(2): 439–442.

[195] Wang Z, Wu H. Equality of multiplicities of Sturm-Liouville eigenvalues[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 306: 540–547.

[196] Wang Z, Wu H. The completeness of eigenfunctions of perturbation connected with Sturm-Liouville operators[J]. J. System and Complexity, 2006, 19(4): 527–537.

[197] Wang Z, Wu H. Dissipativeness of non-self-adjoint Sturm-Liouville operators and completeness of their eigenfunctions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 394(1): 1–12.

[198] Wang Z, Wu H. The index problem for eigenvalues for coupled boundary conditions and Fulton's conjecture[J]. Monatshefte für Mathematik, 2009, 157(2): 177–191.

[199] Wang Z, Wu H. Geometric aspects of Sturm-Liouville problems. VI. arcs of boundary conditions for equalities in eigenvalue inequalities[J]. Pacific J. App. Math., 2008, (1): 43–66.

[200] Wang Z, Wu H. Sturm-Liouville problems with limit-circle end points. I. structures on spaces of problems and their applications[J]. Pacific J. Appl. Math., 2008, 1(4): 79–104.

[201] 王忠, 杨瑞芳. 高阶自伴常微分算子的预解算子 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1997, 28: 330–334.

[202] Weidmann J. Linear Operators in Hilbert Spaces[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[203] Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators[M]. Lecture Notes in Math. 1258, Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[204] Weyl H. Üeber gewöhnliche differentialgleichungen mit singularitäten und die zugehörigen entwichlungen willkürlicher funktionen[J]. Math. Ann., 1910, 68: 220–269.

[205] 夏道行. 线性算子谱理论 (I 亚正常算子与半亚正常算子)[M]. 北京: 科学出版社, 1983.

[206] Yanagawa M, Sun J, Fu S. On the dimensions of fractal interpolation functions defined by hyperbolic iterated function systems[J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1994, 25: 244–252.

[207] Yanagawa M, Sun J, Wang Z. Asymptotic formulae of the eigenvalue-counting function of Laplacian operators in unbounded domains with finite measure[J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1994, 25: 129–133.

[208] Yanagawa M, Wang Z, Sun J. Asymptotic formulae of eigenvalue-counting function for elliptic eigenvalue problems[J]. Ann. Diff. Equat., 2002, 18(2): 147–159.

[209] Yosida K. Functional Analysis[M]. New York: Springer, 1965.

[210] Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators[J]. Rocky Mountain J. Math., 1975, 5: 453–474.

[211] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (上册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990.

[212] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析讲义 (下册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990.

[213] Zhikhar N A. The theory of extensions of J-symmetric operators[J]. Ukrainian Mat. Z, 1959, 11: 352–364.

索　引